

**Dr Dejan Bogdanović  
Dr Nenad Milijić**

# **UPRAVLJANJE PROCESIMA RADA**

**ZBIRKA REŠENIH ZADATAKA**



**UNIVERZITET U BEOGRADU**

**Tehnički fakultet u Boru**

**2018. god.**



**Dr Dejan Bogdanović**  
**Dr Nenad Milijić**

**UPRAVLJANJE**  
**PROCESIMA**  
**RADA**

**ZBIRKA REŠENIH ZADATAKA**

**UNIVERZITET U BEOGRADU**  
**Tehnički fakultet u Boru**  
**2018. god.**

**Autori: Dr Dejan Bogdanović, redovni profesor**  
**Dr Nenad Milijić, docent**  
Univerzitet u Beogradu, Tehnički fakultet u Boru

**UPRAVLJANJE PROCESIMA RADA - Zbirka rešenih zadataka**

**Pomoćni udžbenik**

**Recenzenti:**

**Prof. dr Vesna Spasojević Brkić,**  
Univerzitet u Beogradu, Mašinski fakultet u Beogradu  
**Prof. dr Ivan Mihajlović,**  
Univerzitet u Beogradu, Tehnički fakultet u Boru

**Izdavač: Tehnički fakultet u Boru, Univerzitet u Beogradu**

**Za izdavača:**

**Prof. dr Nada Štrbac,** dekan Tehničkog fakulteta u Boru

**Urednik:**

**Prof. dr Svetlana Ivanov,** predsednik komisije za izdavačku delatnost

**Tiraž: 100 primeraka**

**Štampa: Satcip d.o.o., Kruševac**  
**ISBN 978-86-6305-084-6**

***Štampanje i umnožavanje zabranjeno u celini i u delovima***

CIP - Каталогизација у публикацији - Народна библиотека Србије, Београд

658.5(075.8)(076)

БОГДАНОВИЋ, Дејан, 1965-

Upravljanje procesima rada : zbirka rešenih zadataka : [pomoćni udžbenik] / Dejan Bogdanović, Nenad Milijić. - Bor : Univerzitet u Beogradu, Tehnički fakultet, 2018 (Kruševac : Satcip). - 184 str. : ilustr. ; 26 cm

Tiraž 100. - Bibliografija: str. 181-184.

ISBN 978-86-6305-084-6

1. Милијић, Ненад, 1973- [аутор]

а) Производња - Управљање - Задаци  
COBISS.SR-ID 267500300

# PREDGOVOR

U ovoj knjizi obrađeni su zadaci koji se rade na vežbama iz predmeta *Upravljanje procesima rada* na Tehničkom Fakultetu u Boru, Univerziteta u Beogradu. Knjiga je svojom namenom i sadržajem prilagođena nastavnom programu istoimenog predmeta i ona treba da omogući pripremu studentima za uspešno polaganje računskog dela ispita iz ovog predmeta.

Zbirku čini šest celina sa odgovarajućim zadacima i njihovim kompletnim rešenjima. U prvom delu su dati zadaci iz oblasti kvantitativnih metoda predviđanja. U drugom delu nalaze se odabrani zadaci iz oblasti kapaciteta procesa rada. U trećem delu detaljno su dati zadaci koji se odnose na načine utvrđivanja redosleda ulaza radnih naloga u proces rada. U četvrtom delu obrađena je problematika opterećenja radnih mesta radnim nalogima sa odgovarajućim zadacima i njihovim rešenjima. U petom delu su rešeni zadaci terminiranja redosleda radnih naloga. U šestom, poslednjem delu (analiza izlaznih veličina) su dati odgovarajući zadaci sa rešenjima iz ove oblasti upravljanja procesima rada.

Na početku svakog poglavlja dat je kratak teorijski uvod koji omogućava lakše rešavanje zadataka. Zadaci su rešavani postupno i detaljno, pri čemu su korišćeni grafički prikazi svude gde je to bilo neophodno.

Koristimo priliku da se zahvalimo recenzentima na korisnim sugestijama tokom pripreme rukopisa kao i ostalim učesnicima koji su doprineli kvalitetnom oblikovanju teksta. Autori će biti posebno zahvalni svima onima koji svojim sugestijama i predlozima doprinose poboljšanju ponuđenog teksta.

Bor, 2018. god.

*Autori*



## SADRŽAJ

<b>1. KVANTITATIVNE METODE PREDVIĐANJA.....</b>	<b>1</b>
1.1. Teorijski uvod.....	1
1.2. Metoda pokretnih srednjih vrednosti i metoda najmanjih kvadrata.....	3
1.3. Metoda proseka iz k – vremenskih serija.....	28
1.4. Metoda eksponencijalnog prilagođavanja.....	46
<b>2. KAPACITET PROCESA RADA.....</b>	<b>53</b>
2.1. Teorijski uvod.....	53
2.2. Zadaci.....	55
<b>3. UTVRĐIVANJE REDOSLEDA ULAZA RADNIH NALOGA U PROCES RADA.....</b>	<b>63</b>
3.1. Teorijski uvod.....	63
3.2. Zadaci.....	64
<b>4. OPTEREĆENJE RADNIH MESTA RADNIM NALOZIMA.....</b>	<b>73</b>
4.1. Teorijski uvod.....	73
4.2. Opterećenje radnih mesta radnim nalogima metodom unapred.....	75
4.3. Opterećenje radnih mesta radnim nalogima metodom unazad....	99
<b>5. TERMINIRANJE REDOSLEDA RADNIH NALOGA.....</b>	<b>129</b>
5.1. Teorijski uvod.....	129
5.2. Gantov dijagram.....	131
5.3. Problem terminiranja m x n.....	150
<b>6. ANALIZA IZLAZNIH VELIČINA.....</b>	<b>163</b>
6.1. Teorijski uvod.....	163
6.2. Produktivnost procesa rada.....	166
6.3. Ekonomičnost procesa rada.....	171
6.4. Rentabilnost procesa rada.....	175
<b>LITERATURA.....</b>	<b>181</b>





# 1. KVANTITATIVNE METODE PREDVIĐANJA

## 1.1. TEORIJSKI UVOD

Kvantitativne metode predviđanja su razvijene u cilju predviđanja buduće potražnje za proizvodima. Na bazi predviđanja vrši se planiranje procesa rada u industrijskim sistemima u narednom vremenskom periodu. Kvantitativne metode predviđanja se oslanjaju na podatke iz prethodnog perioda ili na podatke iz uzoraka koji su pouzdani za predviđanje budućih događaja i one koriste model za predviđanje. Postoji veći broj modela za predviđanje, a u narednom tekstu akcentat je dat na sledećim metodama:

- Metoda pokretnih srednjih vrednosti,
- Metoda najmanjih kvadrata,
- Metoda proseka iz k-vremenskih serija, i
- Metoda eksponencijalnog prilagođavanja.

**Metoda pokretnih srednjih vrednosti** se bazira na proračunu srednje vrednosti ostvarenih veličina iz prethodnog perioda. Dobijena vrednost se uzima kao predviđanje za naredni vremenski period. Pri proračunu se koristi sledeći izraz:

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad (1.1)$$

gde je

$\bar{x}_i$  – srednja vrednost – predviđanje za naredni vremenski period,

$x_1, x_2, \dots, x_n$  – ostvarene vrednosti u prethodnom periodu,

$n$  – broj razmatranih prethodnih vremenskih perioda.

**Metoda najmanjih kvadrata** polazi od vremenske serije koja ima opšti oblik jednačine linearnog trenda:

$$y(x_i) = a + b \cdot i \quad (1.2)$$

Radni oblik jednačine linearnog trenda može se prikazati na sledeći način:

$$y = \bar{x}_i + b \cdot (i - \bar{i}) \quad (1.3)$$

gde je

$\bar{i}$  - srednja vrednost perioda, računa se po formuli:

$$\bar{i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i \quad (1.4)$$

$\bar{x}_i$  – srednja vrednost, računa se pomoću izraza (5),

$b$  – koeficijent rasta ili pada trenda, računa se pomoću izraza:

$$b = \frac{n \cdot \sum i \cdot x_i - \sum i \cdot \sum x_i}{n \cdot \sum i^2 - (\sum i)^2} \quad (1.5)$$

**Metoda proseka iz k-vremenskih serija** predstavlja prilagođeni model za vremensku seriju postavljenu modelom:

$$Y_{(t)} = a + b_{(t)} \cdot t \quad (1.6)$$

U trenutku  $t = T$  predviđanja za period  $T + q$  se određuju na osnovu obrasca:

$$Y_{(T+q)} = Y_{(T)} + b_{(T)} \cdot q \quad (1.7)$$

ili

$$Y_{(T+q)} = 2 \cdot M_{(T)} - M_{(T)}^{(2)} + q \cdot \frac{2}{k-1} \cdot (M_{(T)} - M_{(T)}^{(2)}) \quad (1.8)$$

gde je

$M_{(T)}$  – pokretna srednja vrednost prvog reda, računa se na osnovu obrasca:

$$M_{(T)} = \frac{1}{k} (Y_{(T-k+1)} + Y_{(T-k+2)} + \dots + Y_{(T)}) \quad (1.9)$$

$M_{(T)}^{(2)}$  – pokretna srednja vrednost drugog reda, računa se na osnovu sledećeg obrasca:

$$M_{(T)}^{(2)} = \frac{1}{k} (M_{(T-k+1)} + M_{(T-k+2)} + \dots + M_{(T)}) \quad (1.10)$$

**Metoda eksponencijalnog prilagođavanja** se vrši za bilo koji period korišćenjem težinskog proseka svih prethodnih perioda, a prema obrascu:

$$F_t = F_{t-1} + \alpha \cdot (A_{t-1} - F_{t-1}) \quad (1.11)$$

gde je

$F_t$  – prilagođena predviđena veličina za period  $t$ ,

$F_{t-1}$  – prethodno predviđena veličina za period  $(t - 1)$ ,

$A_{t-1}$  – stvarne potrebe u periodu  $(t - 1)$ ,

$\alpha$  – konstanta prilagođavanja (kreće se u granicama od 0 do 1). Veće vrednosti utiču na manji efekat prilagođavanja, odnosno veći uticaj stvarnih potreba.

## 1.2. METODA POKRETNIH SREDNJIH VREDNOSTI I METODA NAJMANJIH KVADRATA

**Zadatak 1.1.** Preduzeće koje se bavi proizvodnjom mariniranih šampinjona želi da predvidi potrebe tržišta za svojim proizvodima u predstojećoj 2018. godini. Preduzeće ima podatke o prodaji (u tonama) za prethodnih osam godina (tabela 1.1.):

**Tabela 1.1.** Podaci o prodaji mariniranih šampinjona

Period (godine)	i	Prodaja $x_i$ (t)
2010.	1	64
2011.	2	58
2012.	3	52
2013.	4	59
2014.	5	62
2015.	6	48
2016.	7	57
2017.	8	65
2018.	9	?

Uraditi:

- Za vremensku seriju koja je data nivoom prodaje proizvoda preduzeća u proteklom osmogodišnjem periodu, odrediti tročlane pokretne srednje vrednosti – PSV(3) i prikazati ih grafički zajedno sa originalnom serijom.
- Metodom najmanjih kvadrata izvršiti predviđanje potrebe tržišta za predstojeću 2018. godinu.

**Rešenje:**

a)

Za proračun se koristi izraz (1.1.).

$$\bar{x}_4 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{64 + 58 + 52}{3} = \frac{174}{3} = 58,0$$

$$\bar{x}_5 = \frac{x_2 + x_3 + x_4}{3} = \frac{58 + 52 + 59}{3} = \frac{169}{3} = 56,3$$

$$\bar{x}_6 = \frac{x_3 + x_4 + x_5}{3} = \frac{52 + 59 + 62}{3} = \frac{173}{3} = 57,6$$

$$\bar{x}_7 = \frac{x_4 + x_5 + x_6}{3} = \frac{59 + 62 + 48}{3} = \frac{169}{3} = 56,3$$

$$\bar{x}_8 = \frac{x_5 + x_6 + x_7}{3} = \frac{62 + 48 + 57}{3} = \frac{167}{3} = 55,6$$

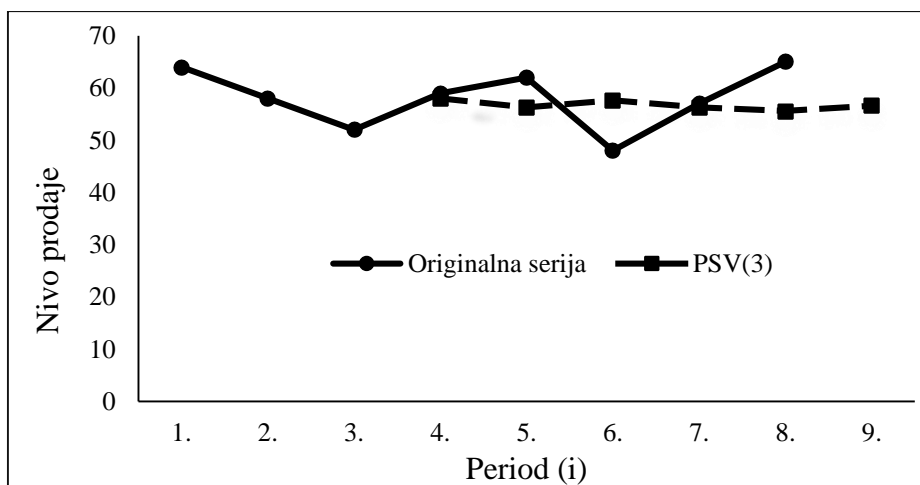
$$\bar{x}_9 = \frac{x_6 + x_7 + x_8}{3} = \frac{48 + 57 + 65}{3} = \frac{170}{3} = 56,6$$

Rezultati proračuna su prikazani u tabeli 1.2.

**Tabela 1.2.** Rezultati pokretnih srednjih vrednosti mariniranih šampinjona

i	$x_i$	PSV(3)
1.	64	
2.	58	
3.	52	
4.	59	58,0
5.	62	56,3
6.	48	57,6
7.	57	56,3
8.	65	55,6
9.		56,6

Grafički prikaz rezultata prikazan je na slici 1.1.



**Slika 1.1.** Grafički prikaz tročlanih pokretnih srednjih vrednosti (PSV(3)) i originalne serije proizvodnje mariniranih šampinjona

b)

U tabeli 1.3 su izračunate određene vrednosti koje se unose u izraze (1.2.) – (1.5.) za proračun predviđanja uz pomoć metode najmanjih kvadrata.

**Tabela 1.3.** Modifikovana tabela za proračun određenih vrednosti kod metode najmanjih kvadrata

n	i	$x_i$	$i \cdot x_i$	$i^2$
1	1	64	64	1
2	2	58	116	4
3	3	52	156	9
4	4	56	224	16
5	5	62	310	25
6	6	48	288	36
7	7	57	399	49
8	8	65	520	64
$\Sigma$	36	462	2077	204

Na osnovu table 1.3. računaju se elementi metode najmanjih kvadrata (srednje vrednosti perioda ( $\bar{i}$ ), srednje vrednosti serije ( $\bar{x}_i$ ) i vrednost koeficijenta b).

$$\bar{i} = \frac{1}{n} \sum i = \frac{1}{8} \cdot 36 = 4,5$$

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{8} \cdot 462 = 58,12$$

$$b = \frac{n \cdot \sum i \cdot x_i - \sum i \cdot \sum x_i}{n \cdot \sum i^2 - (\sum i)^2}$$

$$b = \frac{8 \cdot 2077 - 36 \cdot 462}{8 \cdot 204 - (36)^2} = \frac{16616 - 16632}{1632 - 1296} = \frac{-16}{336}$$

$$b = -0,047$$

Nakon određivanja srednje vrednosti perioda ( $\bar{i}$ ), srednje vrednosti serije ( $\bar{x}_i$ ) i vrednosti koeficijenta b, rezultati se unose u radni oblik jednačine linearne regresije, a u cilju pronalaženja vrednosti koeficijenta a:

$$y = 58,12 + (-0,047) \cdot (i - 4,5)$$

$$y = 58,12 - 0,047 i + 0,2115$$

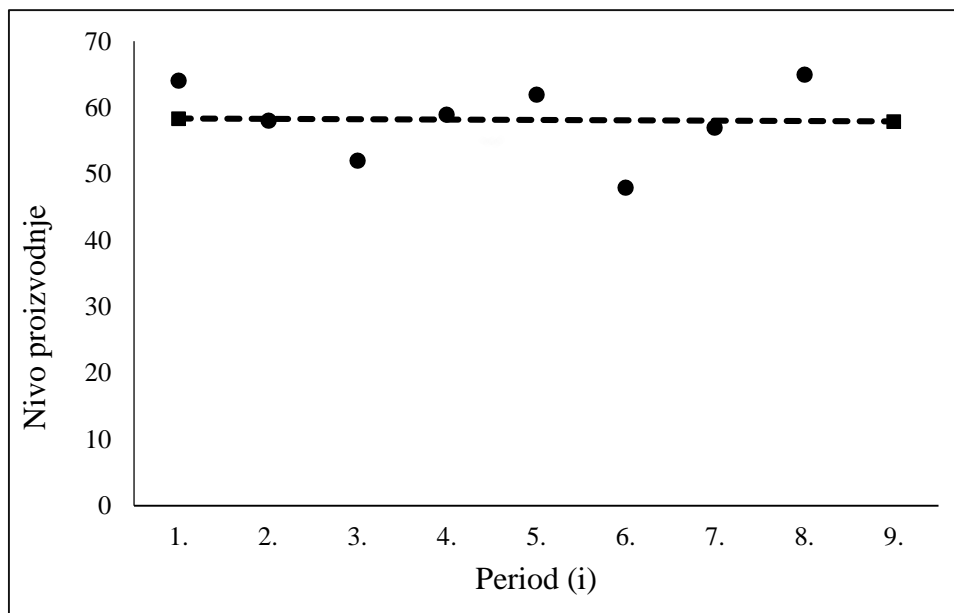
$$y = -0,047 i + 58,3315 \Rightarrow a = 58,3315$$

Potrebe tržišta u predstojećoj 2018. godini:

$$T(9) = -0,047 \cdot 9 + 58,3315$$

$$T(9) = 57,9$$

Grafički prikaz linije trenda prikazan je na slici 1.2.



Slika 1.2. Linija trenda proizvodnje mariniranih šampinjona

**Zadatak 1.2.** Imajući u vidu sezonski karakter svoje robe i odstupanja u potražnji, preduzeće želi da predvidi potrebe tržišta za svojim proizvodima u predstojećem tromesečju, zima 2018. Preduzeće raspolaže podacima o prodaji (u tonama) za prethodnih 16 tromesečja (tabela 1.4.).

*Uraditi:*

- Za vremensku seriju koja je data nivoom prodaje proizvoda preduzeća u proteklom četvorogodišnjem periodu (16 tromesečja), odrediti tročlane pokretne srednje vrednosti – PSV(3) i prikazati ih grafički zajedno sa originalnom serijom.
- Metodom najmanjih kvadrata izvršiti predviđanje potrebe tržišta za zimu 2018. godine.

Tabela 1.4. Podaci o prodaji proizvoda

Period (godine)	i	Prodaja $x_i$ (t)
Zima 2013.	1	182
Proleće 2014.	2	153
Leto 2014.	3	146
Jesen 2014.	4	155
Zima 2014.	5	167
Proleće 2015.	6	140
Leto 2015.	7	138
Jesen 2015.	8	164
Zima 2015.	9	162
Proleće 2016.	10	148
Leto 2016.	11	129
Jesen 2016.	12	139
Zima 2016.	13	165
Proleće 2017.	14	148
Leto 2017.	15	133
Jesen 2017.	16	145
Zima 2018.	17	?

**Rešenje:**

a)

Za proračun se koristi izraz (1.1.).

$$\bar{x}_4 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{182 + 153 + 146}{3} = \frac{481}{3} = 160,3$$

$$\bar{x}_5 = \frac{x_2 + x_3 + x_4}{3} = \frac{153 + 146 + 155}{3} = \frac{454}{3} = 151,3$$

$$\bar{x}_6 = \frac{x_3 + x_4 + x_5}{3} = \frac{146 + 155 + 167}{3} = \frac{468}{3} = 156,0$$

$$\bar{x}_7 = \frac{x_4 + x_5 + x_6}{3} = \frac{155 + 167 + 140}{3} = \frac{462}{3} = 154,0$$

$$\bar{x}_8 = \frac{x_5 + x_6 + x_7}{3} = \frac{167 + 140 + 138}{3} = \frac{445}{3} = 148,3$$

$$\bar{x}_9 = \frac{x_6 + x_7 + x_8}{3} = \frac{140 + 138 + 164}{3} = \frac{442}{3} = 147,3$$

$$\bar{x}_{10} = \frac{x_7 + x_8 + x_9}{3} = \frac{138 + 164 + 162}{3} = \frac{464}{3} = 154,7$$

$$\bar{x}_{11} = \frac{x_8 + x_9 + x_{10}}{3} = \frac{164 + 162 + 148}{3} = \frac{474}{3} = 158,0$$

$$\bar{x}_{12} = \frac{x_9 + x_{10} + x_{11}}{3} = \frac{162 + 148 + 129}{3} = \frac{439}{3} = 146,3$$

$$\bar{x}_{13} = \frac{x_{10} + x_{11} + x_{12}}{3} = \frac{148 + 129 + 139}{3} = \frac{416}{3} = 138,7$$

$$\bar{x}_{14} = \frac{x_{11} + x_{12} + x_{13}}{3} = \frac{129 + 139 + 165}{3} = \frac{433}{3} = 144,3$$

$$\bar{x}_{15} = \frac{x_{12} + x_{13} + x_{14}}{3} = \frac{139 + 165 + 148}{3} = \frac{452}{3} = 150,7$$

$$\bar{x}_{16} = \frac{x_{13} + x_{14} + x_{15}}{3} = \frac{165 + 148 + 133}{3} = \frac{446}{3} = 148,7$$

$$\bar{x}_{17} = \frac{x_{14} + x_{15} + x_{16}}{3} = \frac{148 + 133 + 145}{3} = \frac{426}{3} = 142,0$$

Rezultati proračuna su prikazani u tabeli 1.5.

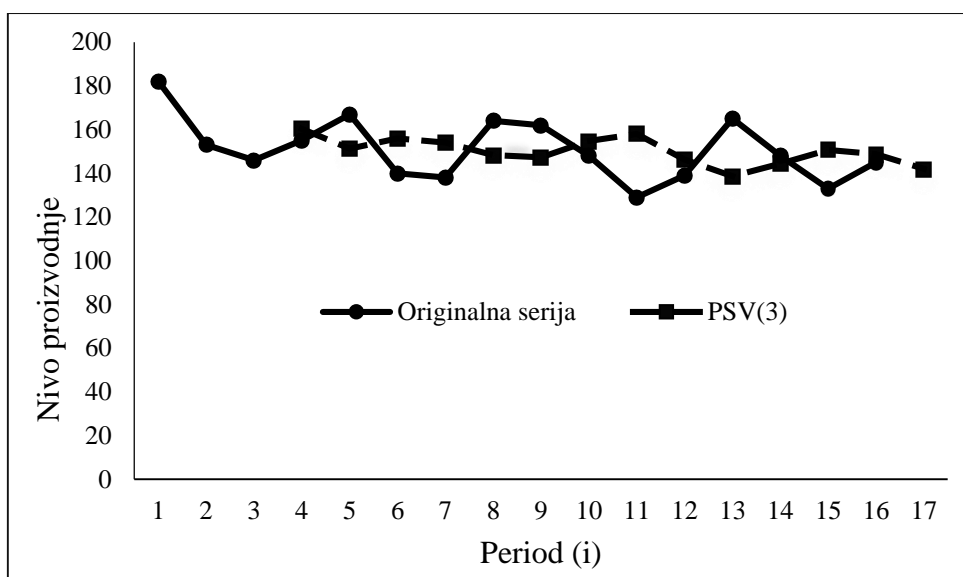
**Tabela 1.5.** Rezultati pokretnih srednjih vrednosti količina proizvoda

<b>i</b>	<b>x<sub>i</sub></b>	<b>PSV(3)</b>
1	182	
2	153	
3	146	
4	155	160,3
5	167	151,3
6	140	156,0
7	138	154,0
8	164	148,3
9	162	147,3



10	148	154,7
11	129	158
12	139	146,3
13	165	138,7
14	148	144,3
15	133	150,7
16	145	148,7
17		142,0

Grafički prikaz tročlanih pokretnih srednjih vrednosti – PSV(3) i originalne serije prikazan je na slici 1.3.



**Slika 1.3.** Grafički prikaz tročlanih pokretnih srednjih vrednosti i originalne serije proizvodnje

b)

U tabeli 1.6. su izračunate vrednosti koje se koriste kod izraza (1.2.) – (1.5.) za proračun predviđanja uz pomoć metode najmanjih kvadrata.

Na osnovu tabele 1.6. računaju se elementi metode najmanjih kvadrata (srednje vrednosti perioda ( $\bar{i}$ ), srednje vrednosti serije ( $\bar{x}_1$ ) i vrednost koeficijenta b).

$$\bar{i} = \frac{1}{n} \sum i = \frac{1}{16} \cdot 136 = 8,5$$

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{16} \cdot 2414 = 150,88$$

$$b = \frac{n \cdot \sum i \cdot x_i - \sum i \cdot \sum x_i}{n \cdot \sum i^2 - (\sum i)^2}$$

**Tabela 1.6.** Modifikovana tabela za proračun određenih vrednosti kod metode najmanjih kvadrata

n	i	x <sub>i</sub>	i · x <sub>i</sub>	i <sup>2</sup>
1	1	182	182	1
2	2	153	306	4
3	3	146	438	9
4	4	155	620	16
5	5	167	835	25
6	6	140	840	36
7	7	138	966	49
8	8	164	1312	64
9	9	162	1458	81
10	10	148	1480	100
11	11	129	1419	121
12	12	139	1668	144
13	13	165	2145	169
14	14	148	2072	196
15	15	133	1995	225
16	16	145	2320	256
Σ	136	2414	20056	1456

$$b = \frac{16 \cdot 20056 - 136 \cdot 2414}{16 \cdot 1496 - (136)^2} = \frac{320896 - 328304}{23936 - 18496} = \frac{-7408}{5440}$$

$$b = -1,3618$$

Nakon proračuna srednje vrednosti perioda ( $\bar{i}$ ), srednje vrednosti serije ( $\bar{x}_i$ ) i vrednosti koeficijenta b, rezultati se koriste u cilju izračunavanja vrednosti koeficijenta a, odnosno:

$$y = 150,88 + (-1,3618) \cdot (i - 8,5)$$

$$y = 150,88 - 1,3618 i + 11,5753$$

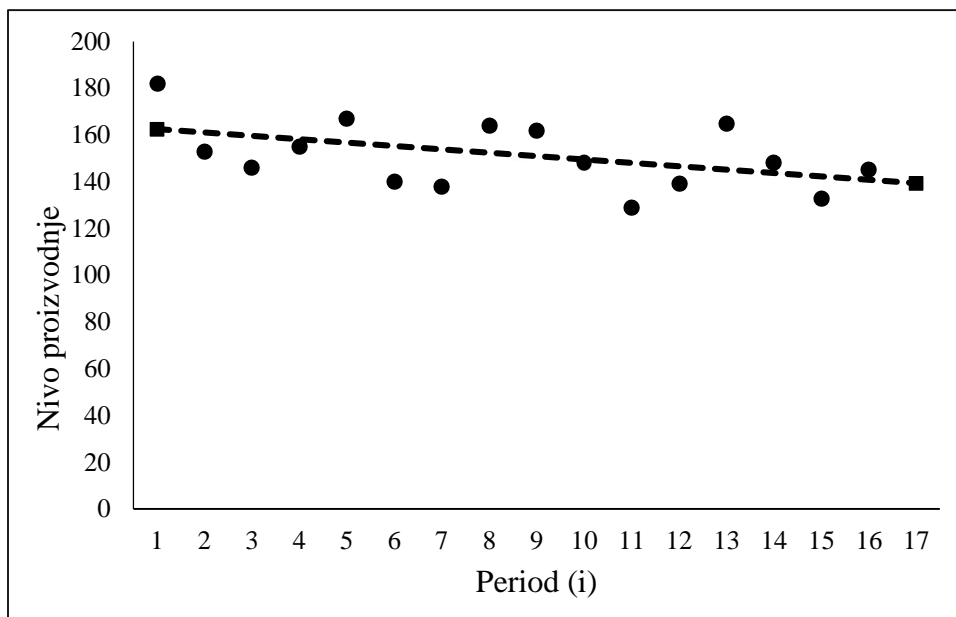
$$y = -1,3618 i + 162,4553 \Rightarrow a = 162,4553$$

Potrebe tržišta za predstojeću zimu 2018. godine:

$$T(17) = -1,3618 \cdot 17 + 162,4553$$

$$T(17) = 139,3$$

Grafički prikaz linije trenda prikazan je na slici 1.4.



Slika 1.4. Linija trenda proizvodnje

**Zadatak 1.3.** Transportno preduzeće želi da predvidi količinu robe koju će prevesti u predstojećoj 2019. godini. U dokumentaciji preduzeća se mogu pronaći podaci o preveženim količinama robe u poslednjih 15 godina (tabela 1.7.).

*Uraditi:*

- Za vremensku seriju koja je data količinama prevežene robe u proteklom petnaestogodišnjem periodu, izvršiti usklađivanje vremenske serije (eliminirati efekte kratkoročnih i slučajnih promena pojave) primenom petočlanih pokretnih srednjih vrednosti – PSV(5). Liniju trenda prikazati grafički zajedno sa originalnom serijom.
- Odrediti predviđenu količinu robe koja će biti prevežena u 2019. godini primenom metode najmanjih kvadrata.

**Tabela 1.7.** Podaci o preveženim količinama robe

Period (godine)	i	Prodaja $x_i$ (t)
2004.	1	9 450
2005.	2	8 100
2006.	3	9 200
2007.	4	10 750
2008.	5	9 400
2009.	6	10 000
2010.	7	8 550
2011.	8	9 200
2012.	9	10 850
2013.	10	11 400
2014.	11	9 700
2015.	12	8 500
2016.	13	9 250
2017.	14	9 100
2018.	15	10 350
2019.	16	?

**Rešenje:**

a)

Za proračun se koristi izraz (1.1.).

$$\bar{x}_6 = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5} = \frac{9450 + 8100 + 9200 + 10750 + 9400}{5} = \frac{46900}{5} = 9380$$

$$\bar{x}_7 = \frac{x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6}{5} = \frac{8100 + 9200 + 10750 + 9400 + 10000}{5} = \frac{47450}{5} = 9490$$

$$\bar{x}_8 = \frac{x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7}{5} = \frac{9200 + 10750 + 9400 + 10000 + 8550}{5} = \frac{47900}{5} = 9580$$

$$\bar{x}_9 = \frac{x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8}{5} = \frac{10750 + 9400 + 10000 + 8550 + 9200}{5} = \frac{47900}{5} = 9580$$

$$\bar{x}_{10} = \frac{x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9}{5} = \frac{9400 + 10000 + 8550 + 9200 + 10850}{5} = \frac{48000}{5} = 9600$$

$$\bar{x}_{11} = \frac{x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10}}{5} = \frac{10000 + 8550 + 9200 + 10850 + 11400}{5} = 10\ 000$$

$$\bar{x}_{12} = \frac{x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11}}{5} = \frac{8550 + 9200 + 10850 + 11400 + 9700}{5} = \frac{49700}{5} = 9\ 940$$

$$\bar{x}_{13} = \frac{x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12}}{5} = \frac{9200 + 10850 + 11400 + 9700 + 8500}{5} = \frac{49650}{5} = 9\ 930$$

$$\bar{x}_{14} = \frac{x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13}}{5} = \frac{10850 + 11400 + 9700 + 8500 + 9250}{5} = \frac{49700}{5} = 9940$$

$$\bar{x}_{15} = \frac{x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14}}{5} = \frac{11400 + 9700 + 8500 + 9250 + 9100}{5} = \frac{47950}{5} = 9\ 590$$

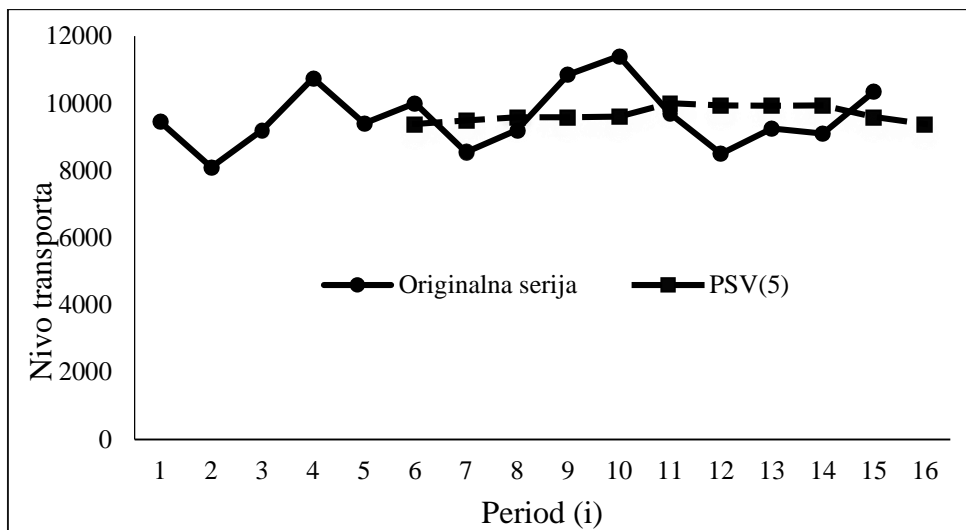
$$\bar{x}_{16} = \frac{x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15}}{5} = \frac{9700 + 8500 + 9250 + 9100 + 10350}{5} = \frac{46900}{5} = 9\ 380$$

Rezultati proračuna su prikazani u tabeli 1.8.

**Tabela 1.8.** Rezultati pokretnih srednjih vrednosti količina prevezene robe

<b>i</b>	<b>x<sub>i</sub></b>	<b>PSV(5)</b>
1	9 450	
2	8 100	
3	9 200	
4	10 750	
5	9 400	
6	10 000	9 380
7	8 550	9 490
8	9 200	9 580
9	10 850	9 580
10	11 400	9 600
11	9 700	10 000
12	8 500	9 940
13	9 250	9 930
14	9 100	9 940
15	10 350	9 590
16		9 380

Grafički prikaz tročlanih pokretnih srednjih vrednosti – PSV(5) i originalne serije prikazan je na slici 1.5.



**Slika 1.5.** Grafički prikaz petočlanih pokretnih srednjih vrednosti i originalne serije transporta

**b)**

U tabeli 1.9. su izračunate vrednosti koje se koriste kod izraza (1.2.) – (1.5.) za proračun predviđanja uz pomoć metode najmanjih kvadrata.

Na osnovu table 1.9. računaju se elementi metode najmanjih kvadrata (srednje vrednosti perioda ( $\bar{i}$ ), srednje vrednosti serije ( $\bar{x}_i$ ) i vrednost koeficijenta b).

$$\bar{i} = \frac{1}{n} \sum i = \frac{1}{15} \cdot 120 = 8$$

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{15} \cdot 143800 = 9586,66$$

$$b = \frac{n \cdot \sum i \cdot x_i - \sum i \cdot \sum x_i}{n \cdot \sum i^2 - (\sum i)^2}$$

$$b = \frac{15 \cdot 1162050 - 120 \cdot 143800}{15 \cdot 1240 - (120)^2} = \frac{17430750 - 17256000}{18600 - 14400} = \frac{174750}{4200}$$

$$b = 41,607$$

**Tabela 1.9.** Modifikovana tabela za proračun određenih vrednosti kod metode najmanjih kvadrata

<b>n</b>	<b>i</b>	<b>x<sub>i</sub></b>	<b>i · x<sub>i</sub></b>	<b>i<sup>2</sup></b>
1	1	9 450	9 450	1
2	2	8 100	16 200	4
3	3	9 200	27 600	9
4	4	10 750	43 000	16
5	5	9 400	47 000	25
6	6	10 000	60 000	36
7	7	8 550	61 950	49
8	8	9 200	73 600	64
9	9	10 850	97 650	81
10	10	11 400	114 000	100
11	11	9 700	106 700	121
12	12	8 500	102 000	144
13	13	9 250	120 250	169
14	14	9 100	127 400	196
15	15	10 350	155 250	225
Σ	120	143 800	1 162 050	1240

Nakon proračuna, rezultati se koriste u cilju izračunavanja vrednosti koeficijenta a, odnosno:

$$y = 9586,66 + 41,607 \cdot (i - 8)$$

$$y = 9586,66 + 41,607 i - 332,856$$

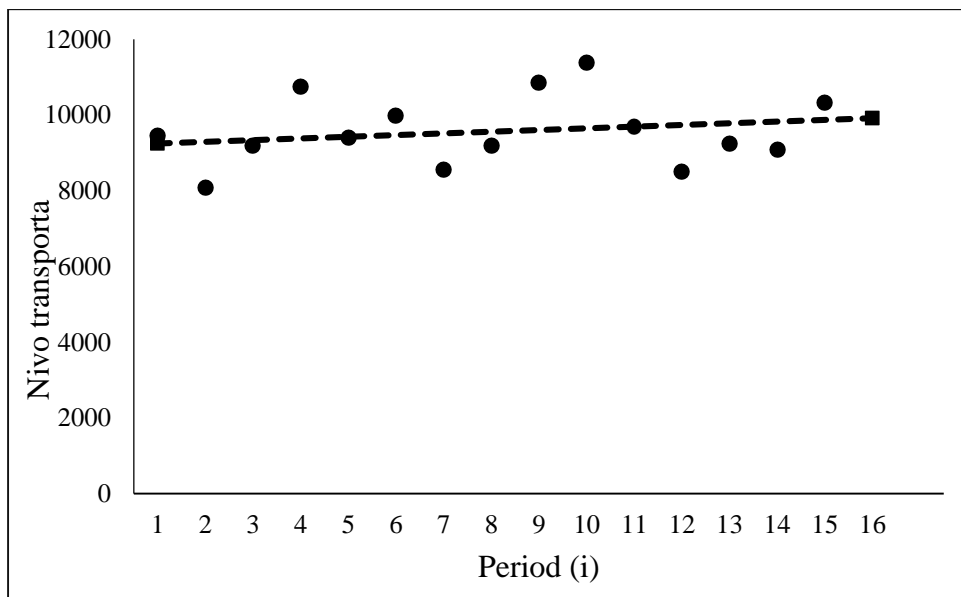
$$y = 41,607 i + 9253,804 \Rightarrow a = 9253,804$$

Potrebe tržišta za predstojeću 2019. godinu:

$$T(16) = 41,607 \cdot 16 + 9253,804$$

$$T(16) = 9919,516$$

Grafički prikaz linije trenda prikazan je na slici 1.6.



Slika 1.6. Linija trenda količina transporta

**Zadatak 1.4.** Cementara želi da predvidi količinu cementa koju će proizvesti u predstojećoj 2019. godini. Podaci o proizvodnji u poslednjih 12 godina dati su u tabeli 1.10.).

Uraditi:

- Za vremensku seriju koja je data nivoom proizvodnje u proteklih 12 godina, odrediti petočlane pokretne srednje vrednosti – PSV(5) i prikazati ih grafički zajedno sa originalnom serijom.
- Metodom najmanjih kvadrata odrediti predviđenu količinu cementa koja će biti proizvedena u 2019. godini.

Tabela 1.10. Podaci o proizvodnji cementa

Period (godine)	i	Proizvodnja $x_i$ (t)
2007.	1	25 330
2008.	2	22 750
2009.	3	23 360
2010.	4	24 880
2011.	5	26 330
2012.	6	25 950
2013.	7	26 600
2014.	8	23 450



2015.	9	22 900
2016.	10	25 500
2017.	11	25 850
2018.	12	26 120
2019.	13	?

**Rešenje:**

a)

Za proračun se koristi izraz (1.1.).

$$\bar{x}_6 = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5} = \frac{25330 + 22750 + 23360 + 24880 + 26330}{5} = \frac{122650}{5}$$

$$\bar{x}_6 = 24\,530$$

$$\bar{x}_7 = \frac{x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6}{5} = \frac{22750 + 23360 + 24880 + 26330 + 25950}{5} = \frac{123750}{5}$$

$$\bar{x}_7 = 24\,654$$

$$\bar{x}_8 = \frac{x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7}{5} = \frac{23360 + 24880 + 26330 + 25950 + 26600}{5} = \frac{127120}{5}$$

$$\bar{x}_8 = 25\,424$$

$$\bar{x}_9 = \frac{x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8}{5} = \frac{24880 + 26330 + 25950 + 26600 + 23450}{5} = \frac{127210}{5}$$

$$\bar{x}_9 = 25\,442$$

$$\bar{x}_{10} = \frac{x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9}{5} = \frac{26330 + 25950 + 26600 + 23450 + 22900}{5} = \frac{125230}{5}$$

$$\bar{x}_{10} = 25\,046$$

$$\bar{x}_{11} = \frac{x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10}}{5} = \frac{25950 + 26600 + 23450 + 22900 + 25500}{5} = \frac{124400}{5}$$

$$\bar{x}_{11} = 24\,880$$

$$\bar{x}_{12} = \frac{x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11}}{5} = \frac{26600 + 23450 + 22900 + 25500 + 25850}{5} = \frac{124300}{5}$$

$$\bar{x}_{12} = 24\,860$$

$$\bar{x}_{13} = \frac{x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12}}{5} = \frac{23450 + 22900 + 25500 + 25850 + 26120}{5} = \frac{123820}{5}$$

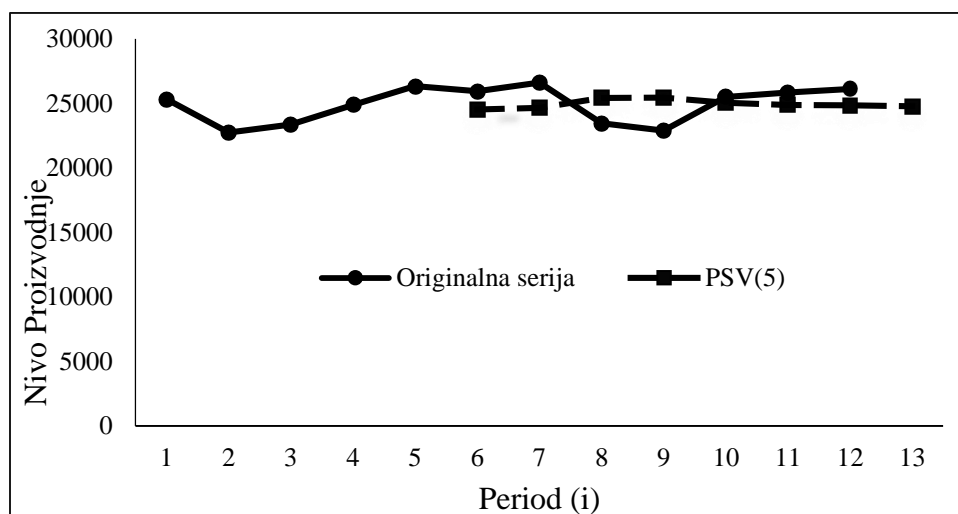
$$\bar{x}_{13} = 24\,764$$

Rezultati proračuna su prikazani u tabeli 1.11.

**Tabela 1.11.** Rezultati pokretnih srednjih vrednosti količina proizvedenog cementa

i	$x_i$	PSV(5)
1	25 330	
2	22 750	
3	23 360	
4	24 880	
5	26 330	
6	25 950	24 530
7	26 600	24 654
8	23 450	25 424
9	22 900	25 442
10	25 500	25 046
11	25 850	24 880
12	26 120	24 860
13		24 764

Grafički prikaz tročlanih pokretnih srednjih vrednosti – PSV(5) i originalne serije prikazan je na slici 1.7.



**Slika 1.7.** Grafički prikaz petočlanih pokretnih srednjih vrednosti i originalne serije proizvodnje cementa

b)

U tabeli 1.12. su izračunate vrednosti koje se koriste kod izraza (1.2.) – (1.5.) za proračun predviđanja uz pomoć metode najmanjih kvadrata.

**Tabela 1.12.** Modifikovana tabela za proračun određenih vrednosti kod metode najmanjih kvadrata

n	i	x <sub>i</sub>	i · x <sub>i</sub>	i <sup>2</sup>
1	1	25 330	25 330	1
2	2	22 750	45 500	4
3	3	23 360	70 080	9
4	4	24 880	99 520	16
5	5	26 330	131 650	25
6	6	25 950	155 700	36
7	7	26 600	186 200	49
8	8	23 450	187 600	64
9	9	22 900	206 100	81
10	10	25 500	255 000	100
11	11	25 850	284 350	121
12	12	26 120	313 440	144
Σ	78	299 020	1 960 470	640

Na osnovu tabele 1.12. računaju se elementi metode najmanjih kvadrata (srednje vrednosti perioda ( $\bar{i}$ ), srednje vrednosti serije ( $\bar{x}_i$ ) i vrednost koeficijenta b).

$$\bar{i} = \frac{1}{n} \sum i = \frac{1}{12} \cdot 78 = 6,5$$

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{12} \cdot 299020 = 24918,33$$

$$b = \frac{n \cdot \sum i \cdot x_i - \sum i \cdot \sum x_i}{n \cdot \sum i^2 - (\sum i)^2}$$

$$b = \frac{12 \cdot 1960470 - 78 \cdot 299020}{12 \cdot 640 - (78)^2} = \frac{23525640 - 23323560}{7680 - 6084} = \frac{202080}{1596}$$

$$b = 126,617$$

Nakon proračuna, rezultati se koriste u cilju izračunavanja vrednosti koeficijenta  $a$ , odnosno:

$$y = 24918,33 + 126,617 \cdot (i - 6,5)$$

$$y = 24918,33 + 126,617 i - 823,008$$

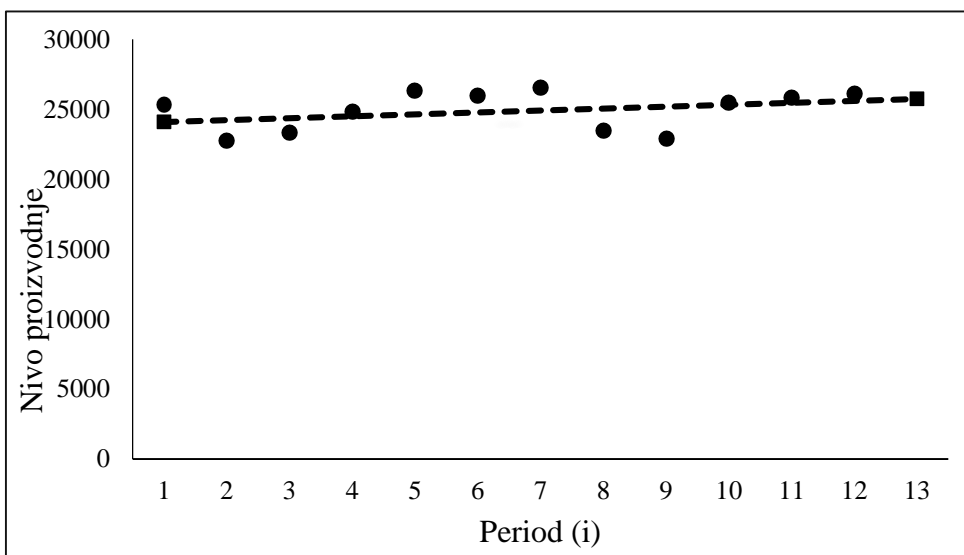
$$y = 126,617 i + 24095,322 \Rightarrow a = 24095,322$$

Potrebe tržišta za predstojeću 2019. godinu:

$$T(13) = 126,617 \cdot 13 + 24095,322$$

$$T(13) = 25741,$$

Grafički prikaz linije trenda prikazan je na slici 1.8.



**Slika 1.8.** Linija trenda količina proizvedenog cementa

**Zadatak 1.5.** Proizvodno preduzeće želi da predvidi potražnju za svojom robom u predstojećoj 2019. godini. U dokumentaciji preduzeća se mogu pronaći podaci o proizvedenim količinama robe u poslednjih 10 godina (tabela 1.13.).

*Uraditi:*

- Za vremensku seriju koja je data količinama proizvedene robe u proteklom desetogodišnjem periodu, izvršiti usklađivanje vremenske serije (eliminirati efekte kratkoročnih i slučajnih promena pojave) primenom tročlanih pokretnih srednjih vrednosti – PSV(3). Liniju trenda prikazati grafički zajedno sa originalnom serijom.

- b) Odrediti predviđenu količinu robe koja će biti proizvedena u 2019. godini primenom metode najmanjih kvadrata.

**Tabela 1.13.** Podaci o proizvedenim količinama robe

Period (godine)	i	Proizvodnja $x_i$ (t)
2009.	1	425
2010.	2	302
2011.	3	511
2012.	4	441
2013.	5	336
2014.	6	468
2015.	7	402
2016.	8	551
2017.	9	388
2018.	10	489
2019.	11	?

**Rešenje:**

a)

Za proračun se koristi izraz (1.1.).

$$\bar{x}_4 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{425 + 302 + 511}{3} = \frac{1238}{3} = 412,67$$

$$\bar{x}_5 = \frac{x_2 + x_3 + x_4}{3} = \frac{302 + 511 + 441}{3} = \frac{1254}{3} = 418,00$$

$$\bar{x}_6 = \frac{x_3 + x_4 + x_5}{3} = \frac{511 + 441 + 336}{3} = \frac{1288}{3} = 429,33$$

$$\bar{x}_7 = \frac{x_4 + x_5 + x_6}{3} = \frac{441 + 336 + 468}{3} = \frac{1245}{3} = 415,00$$

$$\bar{x}_8 = \frac{x_5 + x_6 + x_7}{3} = \frac{336 + 468 + 402}{3} = \frac{1206}{3} = 402,00$$

$$\bar{x}_9 = \frac{x_6 + x_7 + x_8}{3} = \frac{468 + 402 + 551}{3} = \frac{1421}{3} = 473,67$$

$$\bar{x}_{10} = \frac{x_7 + x_8 + x_9}{3} = \frac{402 + 551 + 388}{3} = \frac{1341}{3} = 447,00$$

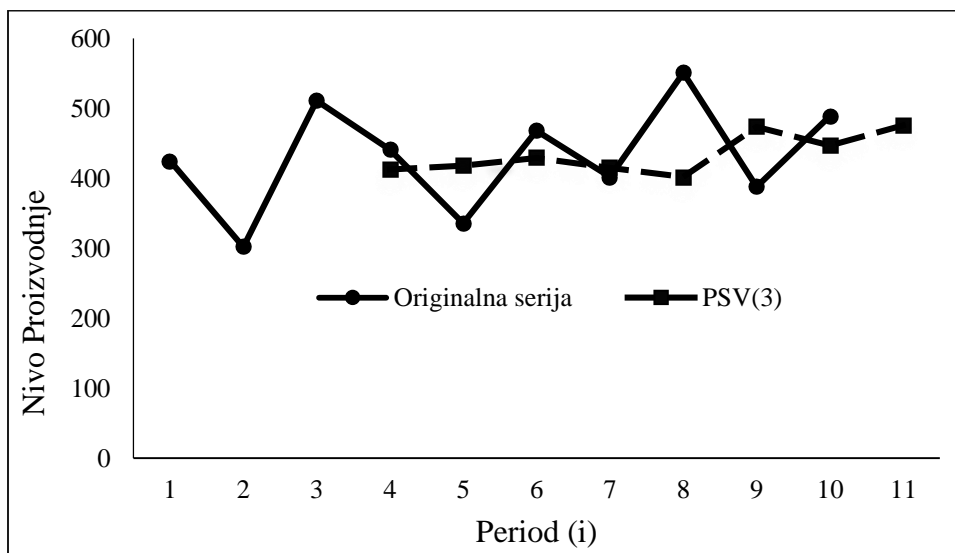
$$\bar{x}_{11} = \frac{x_8 + x_9 + x_{10}}{3} = \frac{551 + 388 + 489}{3} = \frac{1428}{3} = 476,00$$

Rezultati proračuna su prikazani u tabeli 1.14.

**Tabela 1.14.** Rezultati pokretnih srednjih vrednosti količina proizvedene robe

i	x <sub>i</sub>	PSV(3)
1	425	
2	302	
3	511	
4	441	412,67
5	336	418,00
6	468	429,33
7	402	415,00
8	551	402,00
9	388	473,67
10	489	447,00
11		476,00

Grafički prikaz tročlanih pokretnih srednjih vrednosti – PSV(3) i originalne serije prikazan je na slici 1.9.



**Slika 1.9.** Grafički prikaz tročlanih pokretnih srednjih vrednosti i originalne serije proizvodnje

b)

U tabeli 1.15. su izračunate vrednosti koje se koriste kod izraza (1.2.) – (1.5.) za proračun predviđanja uz pomoć metode najmanjih kvadrata.

**Tabela 1.15.** Modifikovana tabela za proračun određenih vrednosti kod metode najmanjih kvadrata

n	i	x <sub>i</sub>	i · x <sub>i</sub>	i <sup>2</sup>
1	1	425	425	1
2	2	302	604	4
3	3	511	1533	9
4	4	441	1764	16
5	5	336	1680	25
6	6	468	2808	36
7	7	402	2814	49
8	8	551	4408	64
9	9	388	3492	81
10	10	489	4890	100
Σ	55	4313	24418	385

Na osnovu tabele 1.15. računaju se elementi metode najmanjih kvadrata (srednje vrednosti perioda ( $\bar{i}$ ), srednje vrednosti serije ( $\bar{x}_i$ ) i vrednost koeficijenta b).

$$\bar{i} = \frac{1}{n} \sum i = \frac{1}{10} \cdot 55 = 5,5$$

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{10} \cdot 4313 = 431,3$$

$$b = \frac{n \cdot \sum i \cdot x_i - \sum i \cdot \sum x_i}{n \cdot \sum i^2 - (\sum i)^2}$$

$$b = \frac{10 \cdot 24418 - 55 \cdot 4313}{10 \cdot 385 - (55)^2} = \frac{244180 - 237215}{3850 - 3025} = \frac{6965}{825}$$

$$b = 8,442$$

Nakon proračuna, rezultati se koriste u cilju izračunavanja vrednosti koeficijenta  $a$ , odnosno:

$$y = 431,3 + 8,442 \cdot (i - 5,5)$$

$$y = 431,3 + 8,442 i - 46,431$$

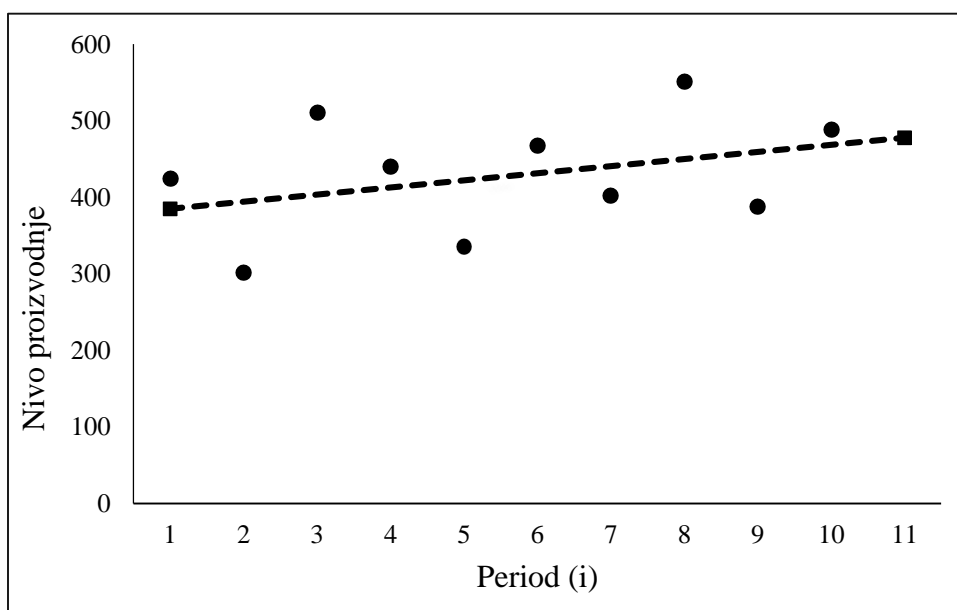
$$y = 8,442 i + 384,869 \Rightarrow a = 384,869$$

Potrebe tržišta za predstojeću zimu 2019. godine:

$$T(11) = 8,442 \cdot 11 + 384,869$$

$$T(11) = 477,731$$

Grafički prikaz linije trenda prikazan je na slici 1.10.



**Slika 1.10.** Linija trenda količina proizvedene robe

**Zadatak 1.6.** Proizvodno preduzeće raspolaže podacima o potrošnji sirovina (polufabrikati A i B) u proteklih 10 godina – tabela 1.16. Menadžment preduzeća želi da predvidi potrošnju navedenih polufabrikata u predstojećoj 2019. godini. Primenom metode tročlanih pokretnih srednjih vrednosti – PSV(3), predvideti potrošnju polufabrikata A i B u predstojećoj 2019. godini i prikazati ih grafički zajedno sa originalnom serijom.



Tabela 1.16. Podaci o potrošnji sirovina

Period (godine)	i	Polufabrikat A x 10 <sup>3</sup> (kom)	Polufabrikat B x 10 <sup>3</sup> (kom)
2009.	1	175	104
2010.	2	122	98
2011.	3	168	76
2012.	4	135	89
2013.	5	199	102
2014.	6	183	88
2015.	7	187	76
2016.	8	114	85
2017.	9	165	100
2018.	10	133	79
2019.	11	?	?

**Rešenje:**

Ovde treba posebno izvršiti predviđanje za polufabrikat A i posebno za polufabrikat B. Za proračun se koristi izraz (1.1.).

**Polufabrikat A**

$$\bar{x}_4 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{175 + 122 + 168}{3} = \frac{465}{3} = 155,00$$

$$\bar{x}_5 = \frac{x_2 + x_3 + x_4}{3} = \frac{122 + 168 + 135}{3} = \frac{425}{3} = 141,67$$

$$\bar{x}_6 = \frac{x_3 + x_4 + x_5}{3} = \frac{168 + 135 + 199}{3} = \frac{502}{3} = 167,33$$

$$\bar{x}_7 = \frac{x_4 + x_5 + x_6}{3} = \frac{135 + 199 + 183}{3} = \frac{517}{3} = 172,33$$

$$\bar{x}_8 = \frac{x_5 + x_6 + x_7}{3} = \frac{199 + 183 + 187}{3} = \frac{569}{3} = 189,67$$

$$\bar{x}_9 = \frac{x_6 + x_7 + x_8}{3} = \frac{183 + 187 + 114}{3} = \frac{484}{3} = 161,33$$

$$\bar{x}_{10} = \frac{x_7 + x_8 + x_9}{3} = \frac{187 + 114 + 165}{3} = \frac{466}{3} = 155,33$$

$$\bar{x}_{11} = \frac{x_8 + x_9 + x_{10}}{3} = \frac{114 + 165 + 133}{3} = \frac{412}{3} = 137,33$$

### **Polufabrikat B**

$$\bar{x}_4 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{104 + 98 + 76}{3} = \frac{278}{3} = 92,67$$

$$\bar{x}_5 = \frac{x_2 + x_3 + x_4}{3} = \frac{98 + 76 + 89}{3} = \frac{263}{3} = 87,67$$

$$\bar{x}_6 = \frac{x_3 + x_4 + x_5}{3} = \frac{76 + 89 + 102}{3} = \frac{267}{3} = 89,00$$

$$\bar{x}_7 = \frac{x_4 + x_5 + x_6}{3} = \frac{89 + 102 + 88}{3} = \frac{279}{3} = 93,00$$

$$\bar{x}_8 = \frac{x_5 + x_6 + x_7}{3} = \frac{102 + 88 + 76}{3} = \frac{266}{3} = 88,67$$

$$\bar{x}_9 = \frac{x_6 + x_7 + x_8}{3} = \frac{88 + 76 + 85}{3} = \frac{249}{3} = 83,00$$

$$\bar{x}_{10} = \frac{x_7 + x_8 + x_9}{3} = \frac{76 + 85 + 100}{3} = \frac{261}{3} = 87,00$$

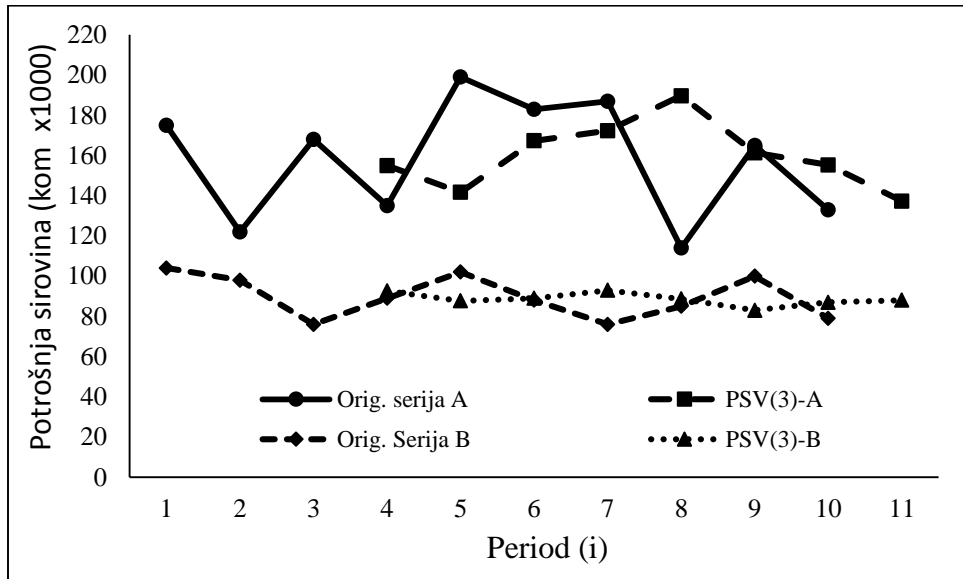
$$\bar{x}_{11} = \frac{x_8 + x_9 + x_{10}}{3} = \frac{85 + 100 + 79}{3} = \frac{264}{3} = 88,00$$

Rezultati proračuna su prikazani u tabeli 1.17.

**Tabela 1.17.** Rezultati pokretnih srednjih vrednosti količina potrošnje sirovina

<b>i</b>	<b>Polufabrikat A x 10<sup>3</sup> (kom)</b>	<b>PSV(3)-A</b>	<b>Polufabrikat B x 10<sup>3</sup> (kom)</b>	<b>PSV(3)-B</b>
1	175		104	
2	122		98	
3	168		76	
4	135	155,00	89	92,67
5	199	141,67	102	87,67
6	183	167,33	88	89,00
7	187	172,33	76	93,00
8	114	189,67	85	88,67
9	165	161,33	100	83,00
10	133	155,33	79	87,00
11		137,33		88,00

Grafički prikaz tročlanih pokretnih srednjih vrednosti – PSV(3) i originalnih serija dat je na slici 1.11.



**Slika 1.11.** Grafički prikaz tročlanih pokretnih srednjih vrednosti i originalne serije potrošnje sirovina

### 1.3. METODA PROSEKA IZ K – VREMENSKIH SERIJA

**Zadatak 1.7.** Fabrika raspolaže podacima za prethodnih 12 godina o količini utrošenih sirovina (tabela 1.18.):

**Tabela 1.18.** Podaci o količini utrošenih sirovina

Period	t	Potrebe Y (t)
2007.	1	1 455
2008.	2	1 503
2009.	3	1 522
2010.	4	1 551
2011.	5	1 505
2012.	6	1 515
2013.	7	1 522
2014.	8	1 501
2015.	9	1 485
2016.	10	1 499
2017.	11	1 510
2018.	12	1 513

Rukovodilac planiranja želi da izvršiti predviđanje količine potrebnih sirovina za predstojeću 2019. godinu. Zadatak rešiti primenom metode proseka iz  $k = 5$  vremenskih serija. Rezultat prikazati i grafikom.

#### Rešenje:

U trenutku  $t = T$  predviđanja za period  $T + q$  se određuju na osnovu jednačina (1.7.) – (1.10.). Ovde je  $q = 1$  jer se sukcesivno vrši predviđanje za po jednu godinu unapred.

Petočlane pokretne sredine prvog reda računaju se na sledeći način:

$$M_{(5)} = \frac{1455 + 1503 + 1522 + 1551 + 1505}{5} = \frac{7536}{5} = 1\,507,2$$

$$M_{(6)} = \frac{1503 + 1522 + 1551 + 1505 + 1515}{5} = \frac{7596}{5} = 1\,519,2$$

$$M_{(7)} = \frac{1522 + 1551 + 1505 + 1515 + 1522}{5} = \frac{7615}{5} = 1\,523,0$$

$$M_{(8)} = \frac{1551 + 1505 + 1515 + 1522 + 1501}{5} = \frac{7594}{5} = 1\,518,8$$

$$M_{(9)} = \frac{1505 + 1515 + 1522 + 1501 + 1485}{5} = \frac{7528}{5} = 1\,505,6$$

$$M_{(10)} = \frac{1515 + 1522 + 1501 + 1485 + 1499}{5} = \frac{7522}{5} = 1\,504,4$$

$$M_{(11)} = \frac{1522 + 1501 + 1485 + 1499 + 1510}{5} = \frac{7517}{5} = 1\,503,4$$

$$M_{(12)} = \frac{1501 + 1485 + 1499 + 1510 + 1513}{5} = \frac{7508}{5} = 1\,501,6$$

Petočlane pokretne sredine drugog reda:

$$M_{(9)}^{(2)} = \frac{1507,2 + 1519,2 + 1523,0 + 1518,8 + 1505,6}{5} = \frac{7573,80}{5} = 1\,514,76$$

$$M_{(10)}^{(2)} = \frac{1519,2 + 1523,0 + 1518,8 + 1505,6 + 1504,4}{5} = \frac{7571}{5} = 1\,514,20$$

$$M_{(11)}^{(2)} = \frac{1523,0 + 1518,8 + 1505,6 + 1504,4 + 1503,4}{5} = \frac{7555,2}{5} = 1\,511,04$$

$$M_{(12)}^{(2)} = \frac{1518,8 + 1505,6 + 1504,4 + 1503,4 + 1501,6}{5} = \frac{7533,8}{5} = 1\,506,76$$

Rezultati predviđanja:

$$Y_{(10)} = 2 \cdot 1505,6 - 1514,76 + 1 \cdot \frac{2}{5-1} \cdot (1505,6 - 1514,76)$$

$$Y_{(10)} = 1496,44 + \frac{1}{2} \cdot (-9,16) = 1496,44 - 4,58$$

$$Y_{(10)} = 1\,491,86$$

$$Y_{(11)} = 2 \cdot 1504,4 - 1514,20 + 1 \cdot \frac{2}{5-1} \cdot (1504,4 - 1514,20)$$

$$Y_{(11)} = 1494,6 + \frac{1}{2} \cdot (-9,8) = 1494,6 - 4,9$$

$$Y_{(11)} = 1\,489,70$$

$$Y_{(12)} = 2 \cdot 1503,4 - 1511,04 + 1 \cdot \frac{2}{5-1} \cdot (1503,4 - 1511,04)$$

$$Y_{(12)} = 1495,76 + \frac{1}{2} \cdot (-7,64) = 1495,76 - 3,82$$

$$Y_{(12)} = 1\,491,94$$

$$Y_{(13)} = 2 \cdot 1501,6 - 1506,76 + 1 \cdot \frac{2}{5-1} \cdot (1501,6 - 1506,76)$$

$$Y_{(13)} = 1496,44 + \frac{1}{2} \cdot (-5,16) = 1496,44 - 2,58$$

$$Y_{(13)} = 1\,493,86$$

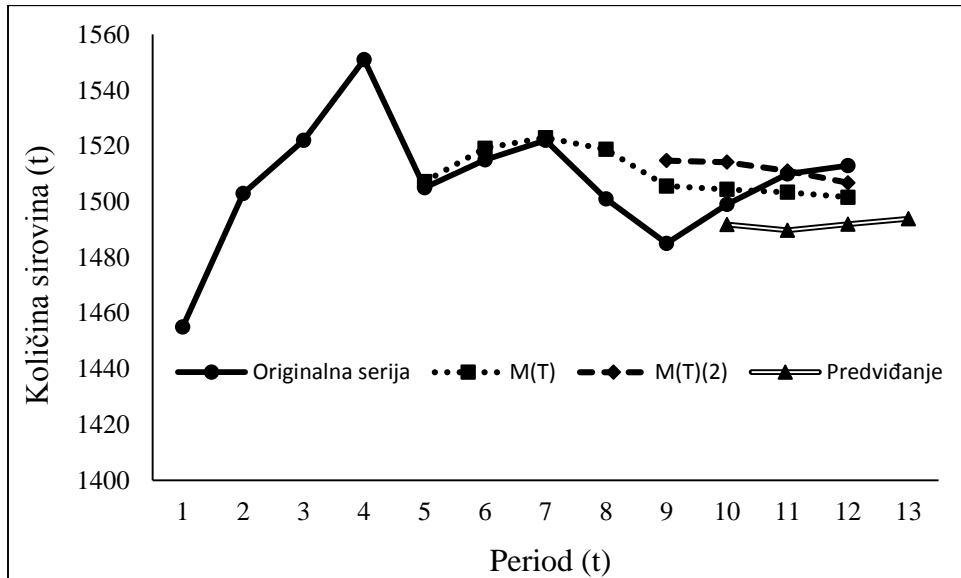
Prikaz rezultata predviđanja je dat u tabeli 1.19.

**Tabela 1.19.** Rezultati predviđanja

Period	t	Potrebe Y (t)	M <sub>(T)</sub>	M <sub>(T)</sub> <sup>(2)</sup>	Predviđanja Y
2007.	1	1 455			
2008.	2	1 503			
2009.	3	1 522			
2010.	4	1 551			
2011.	5	1 505	1 507,2		
2012.	6	1 515	1 519,2		
2013.	7	1 522	1 523,0		
2014.	8	1 501	1 518,8		
2015.	9	1 485	1 505,6	1 514,76	
2016.	10	1 499	1 504,4	1 514,20	1 491,86
2017.	11	1 510	1 503,4	1 511,04	1 489,70
2018.	12	1 513	1 501,6	1 506,76	1 491,94
2019.	13				<b>1 493,86</b>

Predviđena potrebna količina sirovina za 2019. godinu iznosi 1 493,86 t.

Na slici 1.12. dat je grafički prikaz svih izračunatih serija sa originalnom serijom i predviđanjem.



Slika 1.12. Grafik svih serija

**Zadatak 1.8.** Pekarsko preduzeće raspolaže podacima o utrošenim količinama sirovina u proteklih 12 godina (tabela 1.20.):

Tabela 1.20. Podaci o količini utrošenih sirovina

Period	t	Brašno (kg)	Kvasac (kg)
2007.	1	4 000	320
2008.	2	3 800	305
2009.	3	3 900	310
2010.	4	4 100	330
2011.	5	4 000	310
2012.	6	3 700	290
2013.	7	3 600	290
2014.	8	3 800	300
2015.	9	3 500	280
2016.	10	3 900	315
2017.	11	3 850	320
2018.	12	4 100	325

Rukovodilac želi da odredi potrebne količine brašna i kvasca za predstojeću 2019. godinu. Zadatak rešiti primenom metode proseka iz  $k = 5$  vremenskih serija. Rezultate prikazati i grafičkim putem.

**Rešenje:**

Ovde treba posebno izvršiti predviđanje za brašno i posebno za kvasac. U trenutku  $t = T$  predviđanja za period  $T + q$  se određuju na osnovu jednačina (1.7.) – (1.10.), pri čemu je  $q = 1$  (sukcesivno se predviđa za po jednu godinu unapred).

**Brašno:**

Petočlane pokretne sredine prvog reda računaju se po sledećem izrazu:

$$M_{(5)} = \frac{4000 + 3800 + 3900 + 4100 + 4000}{5} = \frac{19800}{5} = 3\ 960$$

$$M_{(6)} = \frac{3800 + 3900 + 4100 + 4000 + 3700}{5} = \frac{19500}{5} = 3\ 900$$

$$M_{(7)} = \frac{3900 + 4100 + 4000 + 3700 + 3600}{5} = \frac{19300}{5} = 3\ 860$$

$$M_{(8)} = \frac{4100 + 4000 + 3700 + 3600 + 3800}{5} = \frac{19200}{5} = 3\ 840$$

$$M_{(9)} = \frac{4000 + 3700 + 3600 + 3800 + 3500}{5} = \frac{18600}{5} = 3\ 720$$

$$M_{(10)} = \frac{3700 + 3600 + 3800 + 3500 + 3900}{5} = \frac{18500}{5} = 3\ 700$$

$$M_{(11)} = \frac{3600 + 3800 + 3500 + 3900 + 3850}{5} = \frac{18650}{5} = 3\ 730$$

$$M_{(12)} = \frac{3800 + 3500 + 3900 + 3850 + 4100}{5} = \frac{19150}{5} = 3\ 830$$

Petočlane pokretne sredine drugog reda:

$$M_{(9)}^{(2)} = \frac{3960 + 3900 + 3860 + 3840 + 3720}{5} = \frac{19280}{5} = 3\ 856$$

$$M_{(10)}^{(2)} = \frac{3900 + 3860 + 3840 + 3720 + 3700}{5} = \frac{19020}{5} = 3\ 804$$

$$M_{(11)}^{(2)} = \frac{3860 + 3840 + 3720 + 3700 + 3730}{5} = \frac{18850}{5} = 3\ 770$$

$$M_{(12)}^{(2)} = \frac{3840 + 3720 + 3700 + 3730 + 3830}{5} = \frac{18820}{5} = 3\ 764$$



Rezultati predviđanja:

$$Y_{(10)} = 2 \cdot 3720 - 3856 + 1 \cdot \frac{2}{5-1} \cdot (3720 - 3856)$$

$$Y_{(10)} = 3854 + \frac{1}{2} \cdot (-136) = 3854 - 68$$

$$Y_{(10)} = 3\ 516$$

$$Y_{(11)} = 2 \cdot 3700 - 3804 + 1 \cdot \frac{2}{5-1} \cdot (3700 - 3804)$$

$$Y_{(11)} = 3596 + \frac{1}{2} \cdot (-104) = 3596 - 52$$

$$Y_{(11)} = 3\ 544$$

$$Y_{(12)} = 2 \cdot 3730 - 3770 + 1 \cdot \frac{2}{5-1} \cdot (3730 - 3770)$$

$$Y_{(12)} = 3690 + \frac{1}{2} \cdot (-40) = 3690 - 20$$

$$Y_{(12)} = 3\ 670$$

$$Y_{(13)} = 2 \cdot 3830 - 3764 + 1 \cdot \frac{2}{5-1} \cdot (3830 - 3764)$$

$$Y_{(13)} = 3896 + \frac{1}{2} \cdot 66 = 3896 + 33$$

$$Y_{(13)} = 3\ 929$$

Prikaz rezultata predviđanja je dat u tabeli 1.21.

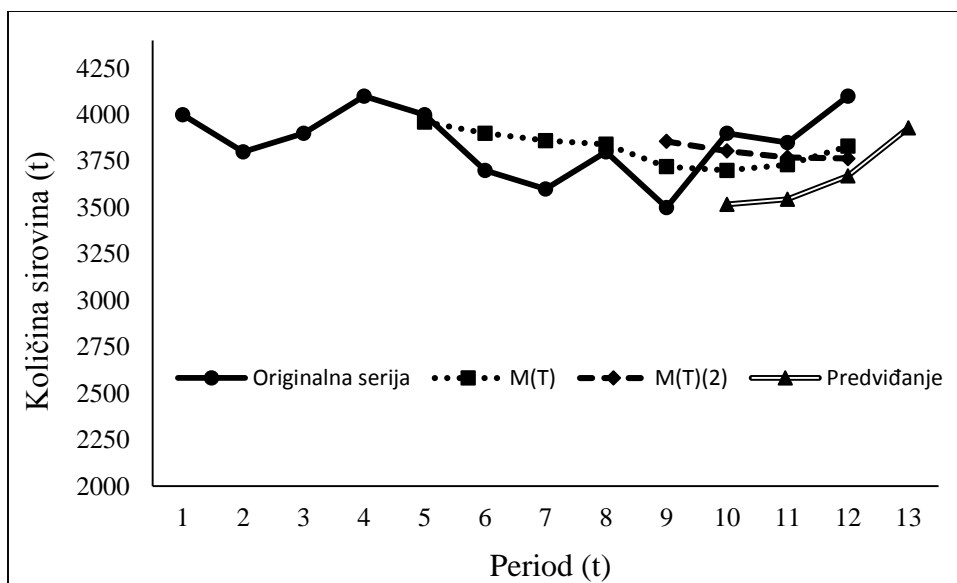
**Tabela 1.21.** Rezultati predviđanja za brašno

Period	t	Potrebe Y (t)	$M_{(T)}$	$M_{(T)}^{(2)}$	Predviđanja Y
2007.	1	4 000			
2008.	2	3 800			
2009.	3	3 900			
2010.	4	4 100			
2011.	5	4 000	3 960		
2012.	6	3 700	3 900		
2013.	7	3 600	3 860		
2014.	8	3 800	3 840		

2015.	9	3 500	3 720	3 856	
2016.	10	3 900	3 700	3 804	3 516
2017.	11	3 850	3 730	3 770	3 544
2018.	12	4 100	3 830	3 764	3 670
2019.	13				<b>3 929</b>

Predviđena potrebna količina brašna za 2019. godinu iznosi 3 929 kg.

Na slici 1.13. dat je grafički prikaz svih izračunatih serija sa originalnom serijom i predviđanjem.



Slika 1.13. Grafik svih serija za brašno

**Kvasac:**

$$M_{(5)} = \frac{320 + 305 + 310 + 330 + 310}{5} = \frac{1575}{5} = 315$$

$$M_{(6)} = \frac{305 + 310 + 330 + 310 + 290}{5} = \frac{1545}{5} = 309$$

$$M_{(7)} = \frac{310 + 330 + 310 + 290 + 290}{5} = \frac{1530}{5} = 306$$

$$M_{(8)} = \frac{330 + 310 + 290 + 290 + 300}{5} = \frac{1520}{5} = 304$$

$$M_{(9)} = \frac{310 + 290 + 290 + 300 + 280}{5} = \frac{1470}{5} = 294$$

$$M_{(10)} = \frac{290 + 290 + 300 + 280 + 315}{5} = \frac{1475}{5} = 295$$

$$M_{(11)} = \frac{290 + 300 + 280 + 315 + 320}{5} = \frac{1505}{5} = 301$$

$$M_{(12)} = \frac{300 + 280 + 315 + 320 + 325}{5} = \frac{1540}{5} = 308$$

Petočlane pokretne sredine drugog reda:

$$M_{(9)}^{(2)} = \frac{315 + 309 + 306 + 304 + 294}{5} = \frac{1528}{5} = 305,6$$

$$M_{(10)}^{(2)} = \frac{309 + 306 + 304 + 294 + 295}{5} = \frac{1508}{5} = 301,6$$

$$M_{(11)}^{(2)} = \frac{306 + 304 + 294 + 295 + 301}{5} = \frac{1500}{5} = 300,0$$

$$M_{(12)}^{(2)} = \frac{304 + 294 + 295 + 301 + 308}{5} = \frac{1502}{5} = 300,4$$

Rezultati predviđanja:

$$Y_{(10)} = 2 \cdot 294 - 305,6 + 1 \cdot \frac{2}{5-1} \cdot (294 - 305,6)$$

$$Y_{(10)} = 282,4 + \frac{1}{2} \cdot (-11,6) = 282,4 - 5,8$$

$$Y_{(10)} = 276,6$$

$$Y_{(11)} = 2 \cdot 295 - 301,6 + 1 \cdot \frac{2}{5-1} \cdot (295 - 301,6)$$

$$Y_{(11)} = 288,4 + \frac{1}{2} \cdot (-6,6) = 288,4 - 3,3$$

$$Y_{(11)} = 285,1$$

$$Y_{(12)} = 2 \cdot 301 - 300 + 1 \cdot \frac{2}{5-1} \cdot (301 - 300)$$

$$Y_{(12)} = 302 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 302 + 0,5$$

$$Y_{(12)} = 302,5$$

$$Y_{(13)} = 2 \cdot 308 - 300,4 + 1 \cdot \frac{2}{5-1} \cdot (308 - 300,4)$$

$$Y_{(13)} = 315,6 + \frac{1}{2} \cdot 7,6 = 315,6 + 3,8$$

$$Y_{(13)} = 319,4$$

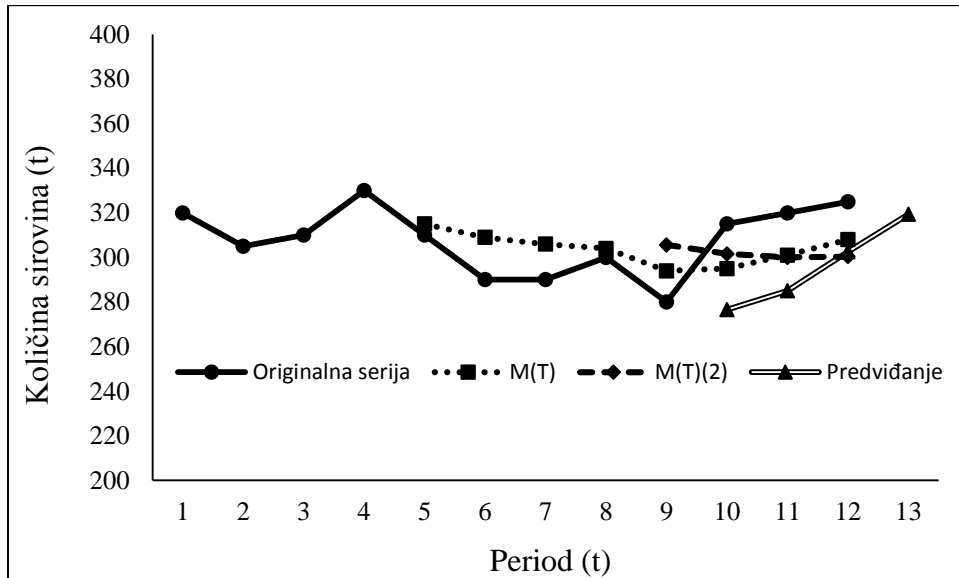
Prikaz rezultata predviđanja je dat u tabeli 1.22.

**Tabela 1.22.** Rezultati predviđanja za kvasac

Period	t	Potrebe Y (t)	$\bar{M}_{(T)}$	$\bar{M}_{(T)}^{(2)}$	Predviđanja Y
2007.	1	320			
2008.	2	305			
2009.	3	310			
2010.	4	330			
2011.	5	310	315		
2012.	6	290	309		
2013.	7	290	306		
2014.	8	300	304		
2015.	9	280	294	305,6	
2016.	10	315	295	301,6	276,6
2017.	11	320	301	300,0	285,1
2018.	12	325	308	300,4	302,5
2019.	13				<b>319,4</b>

Predviđena potrebna količina kvasca za 2019. godinu iznosi 319,4 kg.

Na slici 1.14. dat je grafički prikaz svih izračunatih serija sa originalnom serijom i predviđanjem za kvasac.



Slika 1.14. Grafik svih serija za kvasac

**Zadatak 1.9.** Konditorsko preduzeće raspolaže podacima za prethodnih 7 godina o prodaji keksa (tabela 1.23.):

Tabela 1.23. Podaci o količini prodaje

Period	t	Prodaja Y (t)
2012.	1	711
2013.	2	735
2014.	3	748
2015.	4	772
2016.	5	796
2017.	6	804
2018.	7	791

Menadžment preduzeća želi da izvršiti predviđanje prodaje svojeg proizvoda za predstojeću 2019. godinu. Zadatak rešiti primenom metode proseka iz  $k = 3$  vremenskih serija. Rezultat prikazati i grafikom.

### Rešenje:

U trenutku  $t = T$  predviđanja za period  $T + q$  se određuju na osnovu jednačina (1.7.) – (1.10.). Ovde je takođe,  $q = 1$  jer se sukcesivno vrši predviđanje za po jednu godinu unapred.

Tročlane pokretne sredine prvog reda računaju se po sledećem izrazu:

$$M_{(3)} = \frac{711 + 735 + 748}{3} = \frac{2194}{3} = 731,33$$

$$M_{(4)} = \frac{735 + 748 + 772}{3} = \frac{2255}{3} = 751,67$$

$$M_{(5)} = \frac{748 + 772 + 796}{3} = \frac{2316}{3} = 772,00$$

$$M_{(6)} = \frac{772 + 796 + 804}{3} = \frac{2372}{3} = 790,67$$

$$M_{(7)} = \frac{796 + 804 + 791}{3} = \frac{2391}{3} = 797,00$$

Tročlane pokretne sredine drugog reda:

$$M_{(5)}^{(2)} = \frac{731,33 + 751,67 + 772}{3} = \frac{2255}{3} = 751,67$$

$$M_{(6)}^{(2)} = \frac{751,67 + 772 + 790,67}{3} = \frac{2314,34}{3} = 771,45$$

$$M_{(7)}^{(2)} = \frac{772 + 790,67 + 797}{3} = \frac{2359,67}{3} = 786,56$$

Rezultati predviđanja:

$$Y_{(6)} = 2 \cdot 772 - 751,67 + 1 \cdot \frac{2}{5-1} \cdot (772 - 751,67)$$

$$Y_{(6)} = 792,33 + \frac{1}{2} \cdot 20,33 = 792,33 + 10,16$$

$$Y_{(6)} = 802,49$$

$$Y_{(7)} = 2 \cdot 790,67 - 771,45 + 1 \cdot \frac{2}{5-1} \cdot (790,67 - 771,45)$$

$$Y_{(7)} = 809,89 + \frac{1}{2} \cdot 19,22 = 809,89 + 9,61$$

$$Y_{(7)} = 819,50$$

$$Y_{(8)} = 2 \cdot 797 - 786,56 + 1 \cdot \frac{2}{5-1} \cdot (797 - 786,56)$$

$$Y_{(8)} = 807,44 + \frac{1}{2} \cdot 10,44 = 807,44 + 5,22$$

$$Y_{(8)} = 812,66$$

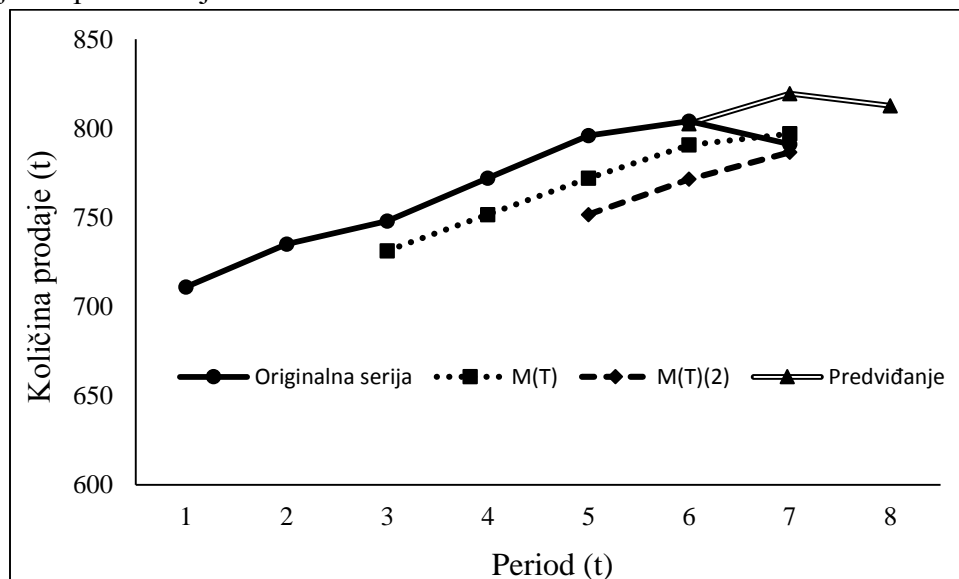
Prikaz rezultata predviđanja je dat u tabeli 1.24.

**Tabela 1.24.** Rezultati predviđanja prodaje

Period	t	Prodaja Y (t)	$M_{(T)}$	$M_{(T)}^{(2)}$	Predviđanja Y
2012.	1	711			
2013.	2	735			
2014.	3	748	731,33		
2015.	4	772	751,67		
2016.	5	796	772,00	751,67	
2017.	6	804	790,67	771,45	802,49
2018.	7	791	797,00	786,56	819,50
2019.	8				<b>812,66</b>

Predviđena potrebna količina sirovina za 2019. godinu iznosi 812,66 t.

Na slici 1.15. dat je grafički prikaz svih izračunatih serija sa originalnom serijom i predviđanjem.



**Slika 1.15.** Grafik svih serija

**Zadatak 1.10.** Kamenolom tehničko – građevinskog kamena raspolaže podacima o prodaji za prethodnih 13 godina (tabela 1.25.):

**Tabela 1.25.** Podaci o prodaji kameneloma

Period	t	Prodaja Y (t)
2006	1	10 355
2007.	2	10 455
2008.	3	11 633
2009.	4	9 552
2010.	5	9 886
2011.	6	10 325
2012.	7	10 455
2013.	8	11 789
2014.	9	12 655
2015.	10	10 352
2016.	11	11 040
2017.	12	10 563
2018.	13	12 378

Uraditi:

- Metodom proseka iz  $k = 5$  vremenskih serija izvršiti predviđanje prodaje za predstojeću 2019. godinu. Rezultat prikazati pomoću odgovarajućeg grafika.
- Metodom najmanjih kvadrata izvršiti predviđanje prodaje za predstojeću 2019. godinu. Rezultat takođe prikazati pomoću odgovarajućeg grafika.

**Rešenje:**

a)

Za rešenje se koriste izrazi (1.7.) – (1.10.). Pošto se sukcesivno vrši predviđanje za po jednu godinu unapred  $q = 1$ .

Petočlane pokretne sredine prvog reda računaju se po sledećem izrazu:

$$M_{(5)} = \frac{10355 + 10455 + 11633 + 9552 + 9886}{5} = \frac{51881}{5} = 10\,376,2$$

$$M_{(6)} = \frac{10455 + 11633 + 9552 + 9886 + 10325}{5} = \frac{51851}{5} = 10\,370,2$$



$$M_{(7)} = \frac{11633 + 9552 + 9886 + 10325 + 10455}{5} = \frac{51851}{5} = 10\,370,2$$

$$M_{(8)} = \frac{9552 + 9886 + 10325 + 10455 + 11789}{5} = \frac{52007}{5} = 10\,401,4$$

$$M_{(9)} = \frac{9886 + 10325 + 10455 + 11789 + 12655}{5} = \frac{55110}{5} = 11\,022,0$$

$$M_{(10)} = \frac{10325 + 10455 + 11789 + 12655 + 10352}{5} = \frac{55576}{5} = 11\,115,2$$

$$M_{(11)} = \frac{10455 + 11789 + 12655 + 10352 + 11040}{5} = \frac{56291}{5} = 11\,258,2$$

$$M_{(12)} = \frac{11789 + 12655 + 10352 + 11040 + 10563}{5} = \frac{56399}{5} = 11\,279,8$$

$$M_{(13)} = \frac{12655 + 10352 + 11040 + 10563 + 12378}{5} = \frac{56988}{5} = 11\,397,6$$

Petočlane pokretne sredine drugog reda:

$$M_{(9)}^{(2)} = \frac{10376,2 + 10370,2 + 10370,2 + 10401,4 + 11022}{5} = \frac{52540}{5} = 10\,508,00$$

$$M_{(10)}^{(2)} = \frac{10370,2 + 10370,2 + 10401,4 + 11022 + 11115,2}{5} = \frac{53278,8}{5} = 10\,655,76$$

$$M_{(11)}^{(2)} = \frac{10370,2 + 10401,4 + 11022 + 11115,2 + 11258,2}{5} = \frac{54167}{5} = 10\,833,40$$

$$M_{(12)}^{(2)} = \frac{10401,4 + 11022 + 11115,2 + 11258,2 + 11279,8}{5} = \frac{55076,6}{5} = 11\,015,32$$

$$M_{(13)}^{(2)} = \frac{11022 + 11115,2 + 11258,2 + 11279,8 + 11397,6}{5} = \frac{56072,8}{5} = 11\,214,56$$

Rezultati predviđanja:

$$Y_{(10)} = 2 \cdot 11022 - 10508 + 1 \cdot \frac{2}{5-1} \cdot (11022 - 10508)$$

$$Y_{(10)} = 11536 + \frac{1}{2} \cdot 514 = 11536 + 257$$

$$Y_{(10)} = 11\,793,00$$

$$Y_{(11)} = 2 \cdot 11115,2 - 10655,76 + 1 \cdot \frac{2}{5-1} \cdot (11115,2 - 10655,76)$$

$$Y_{(11)} = 11574,64 + \frac{1}{2} \cdot 459,44 = 11574,64 + 229,72$$

$$Y_{(11)} = 11\ 804,36$$

$$Y_{(12)} = 2 \cdot 11258,2 - 10833,4 + 1 \cdot \frac{2}{5-1} \cdot (11258,2 - 10833,4)$$

$$Y_{(12)} = 11683 + \frac{1}{2} \cdot 424,8 = 11683 + 212,4$$

$$Y_{(12)} = 11\ 895,40$$

$$Y_{(13)} = 2 \cdot 11279,8 - 11015,32 + 1 \cdot \frac{2}{5-1} \cdot (11279,8 - 11015,32)$$

$$Y_{(13)} = 11544,28 + \frac{1}{2} \cdot 264,48 = 11544,28 + 132,24$$

$$Y_{(13)} = 11\ 676,52$$

$$Y_{(14)} = 2 \cdot 11397,6 - 11214,56 + 1 \cdot \frac{2}{5-1} \cdot (11397,6 - 11214,56)$$

$$Y_{(14)} = 11580,64 + \frac{1}{2} \cdot 183,04 = 11580,64 + 91,52$$

$$Y_{(14)} = 11\ 672,16$$

Prikaz rezultata predviđanja je dat u tabeli 1.26.

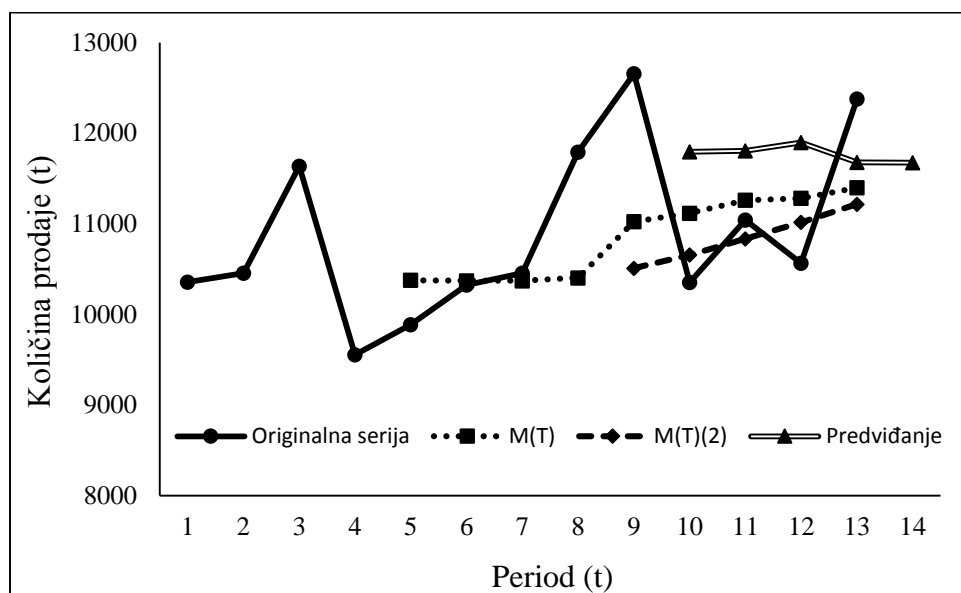
**Tabela 1.26.** Rezultati predviđanja

Period	t	Potrebe Y (t)	M <sub>(T)</sub>	M <sub>(T)<sup>(2)</sup></sub>	Predviđanja Y
2006.	1	10 355			
2007.	2	10 455			
2008.	3	11 633			
2009.	4	9 552			
2010.	5	9 886	10 376,2		
2011.	6	10 325	10 370,2		
2012.	7	10 455	10 370,2		
2013.	8	11 789	10 401,4		
2014.	9	12 655	11 022,0	10 508,00	

2015.	10	10 352	11 115,2	10 655,76	11 793,00
2016.	11	11 040	11 258,2	10 833,40	11 804,36
2017.	12	10 563	11 279,8	11 015,32	11 895,40
2018.	13	12 378	11 397,6	11 214,56	11 676,52
2019.	14				<b>11 672,16</b>

Predviđena količina tehničko – građevinskog kamena za prodaju u 2019. godini iznosi 11 672,16 t.

Na slici 1.16. dat je grafički prikaz svih izračunatih serija sa originalnom serijom i predviđanjem.



Slika 1.16. Grafik svih serija

b)

U tabeli 1.27. su izračunate vrednosti koje se koriste kod izraza (1.2.) – (1.5.) za proračun predviđanja uz pomoć metode najmanjih kvadrata.

Na osnovu tabele 1.27. računaju se elementi metode najmanjih kvadrata (srednje vrednosti perioda ( $\bar{i}$ ), srednje vrednosti serije ( $\bar{x}_i$ ) i vrednost koeficijenta b).

**Tabela 1.27.** Modifikovana tabela za proračun određenih vrednosti kod metode najmanjih kvadrata

n	i	$x_i$	$i \cdot x_i$	$i^2$
1	1	10 355	10 355	1
2	2	10 455	20 910	4
3	3	11 633	34 899	9
4	4	9 552	38 208	16
5	5	9 886	49 430	25
6	6	10 325	61 950	36
7	7	10 455	73 185	49
8	8	11 789	94 312	64
9	9	12 655	113 895	81
10	10	10 352	103 520	100
11	11	11 040	121 440	121
12	12	10 563	126 756	144
13	13	12 378	160 914	169
$\Sigma$	91	141 438	1 009 774	819

$$\bar{i} = \frac{1}{n} \sum i = \frac{1}{13} \cdot 91 = 7$$

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{13} \cdot 141438 = 10\,879,85$$

$$b = \frac{n \cdot \sum i \cdot x_i - \sum i \cdot \sum x_i}{n \cdot \sum i^2 - (\sum i)^2}$$

$$b = \frac{13 \cdot 1009774 - 91 \cdot 141438}{13 \cdot 819 - (91)^2} = \frac{13127062 - 12870858}{10647 - 8281} = \frac{256204}{2336}$$

$$b = 108,286$$

Nakon proračuna, rezultati se koriste u cilju izračunavanja vrednosti koeficijenta a, odnosno:

$$y = 10879,85 + 108,286 \cdot (i - 7)$$

$$y = 10879,85 + 108,286 i - 758,002$$

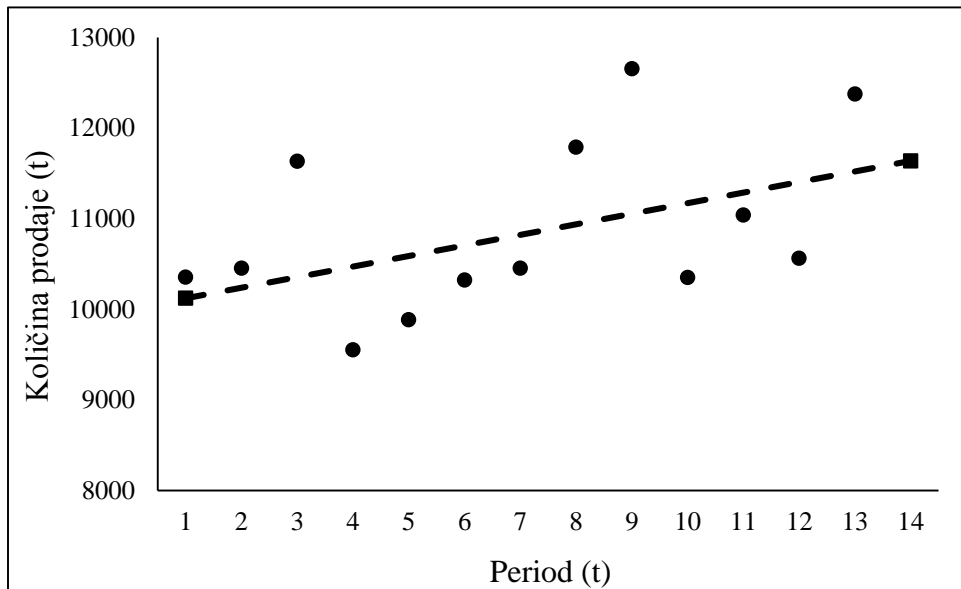
$$y = 108,286 i + 10121,848 \Rightarrow a = 10121,848$$

Predviđanje prodaje tehničko – građevinskog kamena za predstojeću 2019. godinu iznosi:

$$T(14) = 108,286 \cdot 14 + 10121,848$$

$$T(14) = 11\,637,852$$

Grafički prikaz linije trenda prikazan je na slici 1.17.



**Slika 1.17.** Linija trenda količina proizvedene robe

## 1.4. METODA EKSPONENCIJALNOG PRILAGOĐAVANJA

**Zadatak 1.11.** Kotlarnica jednog preduzeća raspolaže podacima o godišnjoj potrošnji uglja (u tonama) za prethodnih osam godina – tabela 1.28.:

**Tabela 1.28.** Potrošnja uglja kotlarnice po periodima

Period	Ostvarena količina
1	152
2	144
3	168
4	139
5	174
6	155
7	169
8	183

Ako je predviđanje za prvi period (godinu) iznosilo 162 t, odrediti predviđanje potrebne količine uglja za deveti period (predstojeću godinu) uz uslov da je  $\alpha = 0,1$ . Za predviđanje koristiti metodu eksponencijalnog prilagođavanja. Rezultat prikazati i pomoću odgovarajućeg grafika.

### Rešenje:

Predviđanje se vrši za bilo koji vremenski period korišćenjem težinskog proseka svih prethodnih perioda, a prema obrascu (1.11.).

$$F_1 = 162,00$$

$$F_2 = 162,00 + 0,1 \cdot (152,00 - 162,00) = 161,00$$

$$F_3 = 161,00 + 0,1 \cdot (144,00 - 161,00) = 159,30$$

$$F_4 = 159,30 + 0,1 \cdot (168,00 - 159,30) = 160,17$$

$$F_5 = 160,17 + 0,1 \cdot (139,00 - 160,17) = 158,05$$

$$F_6 = 158,05 + 0,1 \cdot (174,00 - 158,05) = 159,64$$

$$F_7 = 159,64 + 0,1 \cdot (155,00 - 159,64) = 159,18$$

$$F_8 = 159,18 + 0,1 \cdot (169,00 - 159,18) = 160,26$$

$$F_9 = 160,26 + 0,1 \cdot (183,00 - 160,26) = 162,53$$

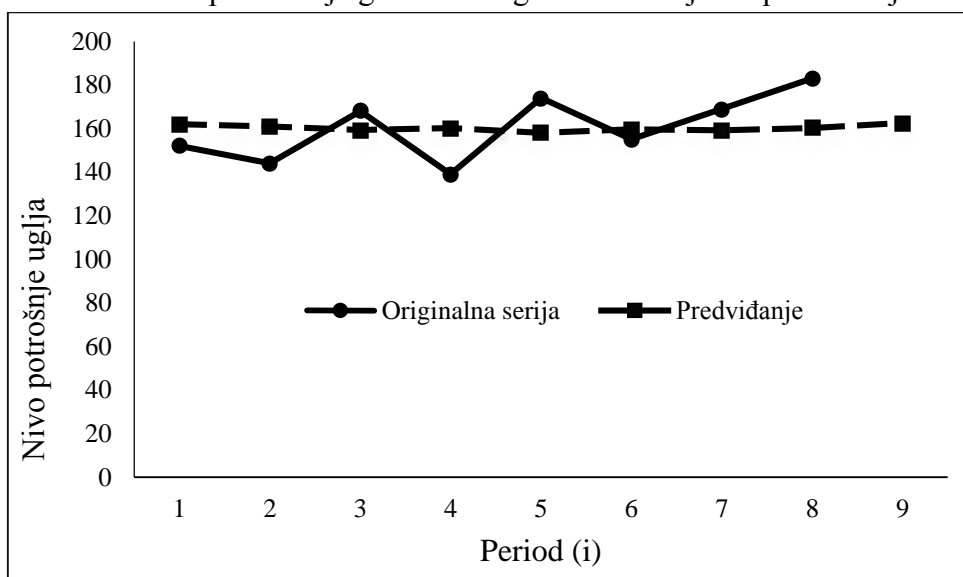
Rezultati predviđanja su dati u tabeli 1.29.

Tabela 1.29. Rezultati predviđanja

Period	Ostvarena količina	Predviđena količina
1	152	162,00
2	144	161,00
3	168	159,30
4	139	160,17
5	174	158,05
6	155	159,64
7	169	159,18
8	183	160,26
9		<b>162,53</b>

Predviđena potrebna količina uglja za predstojeću godinu iznosi 162,53 t.

Na slici 1.18. prikazan je grafik sa originalnom serijom i predviđanjem.



Slika 1.18. Grafik sa originalnom serijom i predviđanjem

**Zadatak 1.12.** Preduzeće „Evropa“ prihvata načela savremenog menadžmenta i svoju proizvodnju želi da prilagodi potrebama tržišta. Preduzeća raspolaže podacima o realizovanoj prodaji u proteklih 10 godina (u tonama) – tabela 1.30.:

**Tabela 1.30.** Podaci o prodaji

Period (god)	Ostvarena količina (t)
1	78
2	63
3	52
4	70
5	83
6	95
7	77
8	71
9	75
10	81

Predviđanje nivoa prodaje za prvu godinu iznosilo je 73 t. Odrediti predviđanje potreba tržišta za predstojeću (jedanaestu) godinu za  $\alpha = 0,1$ , i za  $\alpha = 0,9$ . Za predviđanje koristiti metodu eksponencijalnog prilagođavanja. Rezultat prikazati i pomoću odgovarajućeg grafika.

**Rešenje:*****Predviđanje za  $\alpha = 0,1$ :***

$$F_1 = 73,00$$

$$F_2 = 73,00 + 0,1 \cdot (78,00 - 73,00) = 73,50$$

$$F_3 = 73,50 + 0,1 \cdot (63,00 - 73,50) = 72,45$$

$$F_4 = 72,45 + 0,1 \cdot (52,00 - 72,45) = 70,41$$

$$F_5 = 70,41 + 0,1 \cdot (70,00 - 70,41) = 70,37$$

$$F_6 = 70,37 + 0,1 \cdot (83,00 - 70,37) = 71,63$$

$$F_7 = 71,63 + 0,1 \cdot (95,00 - 71,63) = 73,97$$

$$F_8 = 73,97 + 0,1 \cdot (77,00 - 73,97) = 74,27$$

$$F_9 = 74,27 + 0,1 \cdot (71,00 - 74,27) = 73,94$$

$$F_{10} = 73,94 + 0,1 \cdot (75,00 - 73,94) = 74,05$$

$$F_{11} = 74,05 + 0,1 \cdot (81,00 - 74,05) = 74,74$$



**Predviđanje za  $\alpha = 0,9$ :**

$$F_1 = 73,00$$

$$F_2 = 73,00 + 0,9 \cdot (78,00 - 73,00) = 77,50$$

$$F_3 = 77,50 + 0,9 \cdot (63,00 - 77,50) = 64,45$$

$$F_4 = 64,45 + 0,9 \cdot (52,00 - 64,45) = 53,25$$

$$F_5 = 53,25 + 0,9 \cdot (70,00 - 53,25) = 68,32$$

$$F_6 = 68,32 + 0,9 \cdot (83,00 - 68,32) = 81,53$$

$$F_7 = 81,53 + 0,9 \cdot (95,00 - 81,53) = 93,65$$

$$F_8 = 93,65 + 0,9 \cdot (77,00 - 93,65) = 78,66$$

$$F_9 = 78,66 + 0,9 \cdot (71,00 - 78,66) = 71,77$$

$$F_{10} = 71,77 + 0,9 \cdot (75,00 - 71,77) = 74,68$$

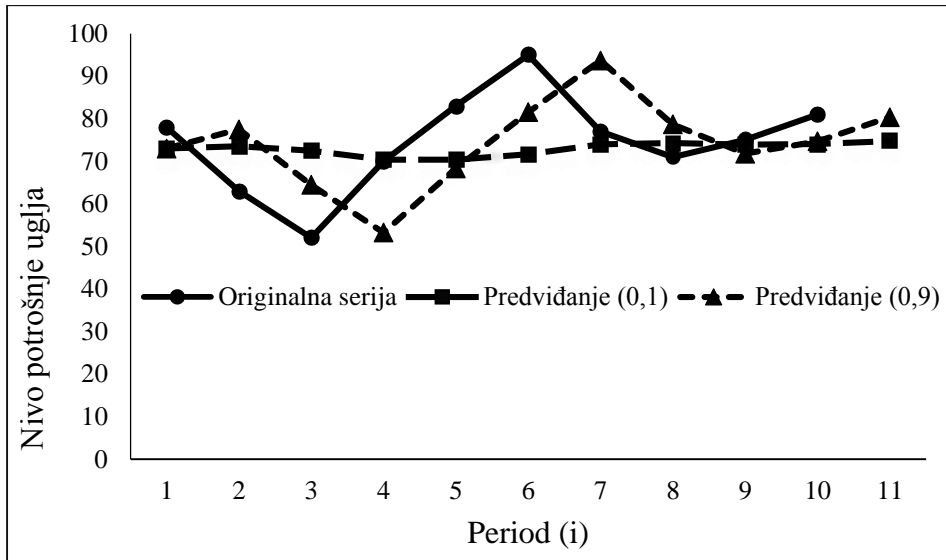
$$F_{11} = 74,68 + 0,9 \cdot (81,00 - 74,68) = 80,37$$

Rezultati predviđanja su dati u tabeli 1.31.

**Tabela 1.31.** Rezultati predviđanja

Period	Ostvarena količina	Predviđena količina $\alpha = 0,1$	Predviđena količina $\alpha = 0,9$
1	78	73,00	73,00
2	63	73,50	77,50
3	52	72,45	64,45
4	70	70,41	53,25
5	83	70,37	68,32
6	95	71,63	81,53
7	77	73,97	93,65
8	71	74,27	78,66
9	75	73,94	71,77
10	81	74,05	74,68
11		<b>74,74</b>	<b>80,37</b>

Na slici 1.19. prikazan je grafik sa originalnom serijom prodaje i predviđanjima za  $\alpha = 0,1$  i  $\alpha = 0,9$ .



Slika 1.1.19. Grafik sa originalnom serijom i predviđanjima prodaje

**Zadatak 1.13.** Transportno preduzeće posluje prethodnih 5 godina i raspolaže podacima o godišnjoj potrošnji goriva ( u litrima) – tabela 1.32.:

Tabela 1.32. Potrošnja goriva transportnog preduzeća

Period	Ostvarena količina (l)
1	240 000
2	310 000
3	300 000
4	380 000
5	350 000

Ako je predviđanje za prvu godinu iznosilo 250 000 l goriva, odrediti predviđanje potrebne količine goriva za nesmetano poslovanje u narednoj godini (šestoj) uz uslov da je  $\alpha = 0,3$ . Za predviđanje koristiti metodu eksponencijalnog prilagođavanja. Rezultat prikazati i pomoću odgovarajućeg grafika.

**Rešenje:**

$$F_1 = 250\ 000,00$$

$$F_2 = 250000 + 0,3 \cdot (240000 - 250000) = 247\ 000,0$$

$$F_3 = 247000 + 0,3 \cdot (310000 - 247000) = 265\ 900,0$$

$$F_4 = 265900 + 0,3 \cdot (300000 - 265900) = 276\ 130,0$$

$$F_5 = 276130 + 0,3 \cdot (380000 - 276130) = 307\,291,0$$

$$F_6 = 307291 + 0,3 \cdot (350000 - 307291) = 320\,103,7$$

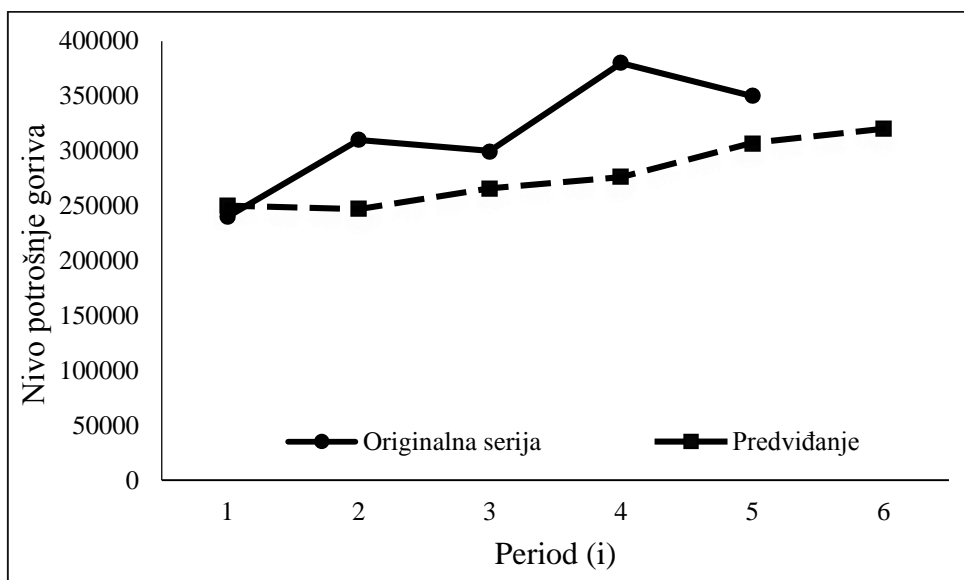
Rezultati predviđanja su dati u tabeli 1.33.

**Tabela 1.33.** Rezultati predviđanja

Period	Ostvarena količina	Predviđena količina
1	240 000	250 000,0
2	310 000	247 000,0
3	300 000	265 900,0
4	380 000	276 130,0
5	350 000	307 291,0
6		<b>320 103,7</b>

Predviđena potrebna količina goriva za predstojeću godinu iznosi 320 103,7 l.

Na slici 1.20. prikazan je grafik sa originalnom serijom i predviđanjem.



**Slika 1.20.** Grafik sa originalnom serijom i predviđanjem



## 2. KAPACITET PROCESA RADA

### 2.1. TEORIJSKI UVOD

Proračun kapaciteta procesa rada je veoma važan parametar koji ukazuje menadžerima mogućnost jedinice sistema da proizvede određenu količinu rada. Shodno tome, kapacitet se definiše kao količina rada koju jedinica sistema može dati u određenom vremenskom periodu. Postoji više vrsta kapaciteta procesa rada. U ovoj zbirci razmatraće se sledeće vrste kapaciteta:

- Potencijalni kapacitet,
- Raspoloživi kapacitet,  $i$
- Efektivni kapacitet.

**Potencijalni kapacitet** predstavlja količinu rada koju jedinica sistema može maksimalno dati u datom vremenskom periodu. Pri proračunu se koristi sledeći izraz:

$$K_{pi} = m \cdot n \cdot s \text{ (vrednosne jedinice / vremenski period)} \quad (2.1.)$$

gde je

$m$  – ukupan broj radnih dana u razmatranom vremenskom periodu,

$n$  – ukupan broj smena na dan,  $i$

$s$  – ukupna broj radnih časova u smeni.

**Raspoloživi kapacitet** se definiše kao količina rada koju sistem daje u datom vremenskom periodu umanjeno za vremena potrebna za izvođenje postupaka održavanja i vraćanja sistema iz stanja u otkazu u stanje u radu. Računa se po sledećoj formuli:

$$K_{ri} = K_{pi} - T_{uo} \text{ (vrednosne jedinice / vremenski period)} \quad (2.2.)$$

gde je

$T_{uo}$  – gubitak vremena za izvođenje postupaka održavanja i vraćanja sistema iz stanja u otkazu u stanje u radu.

**Efektivni kapacitet** predstavlja onu količinu rada koju sistem daje u stvarnim uslovima rada u datom vremenskom periodu. Izraz za proračun ovog kapaciteta ima sledeći oblik:

$$K_{ei} = m_e \cdot n_e \cdot s_e \cdot \eta_e \text{ (vrednosne jedinice / vremenski period)} \quad (2.3.)$$

gde je

$m_e$  – ukupan broj efektivnih radnih dana u razmatranom vremeskom periodu,

$n_e$  – ukupan broj efektivnih smena na dan,

$s_e$  – ukupa broj efektivnih radnih časova u smeni,  $i$

$\eta_e$  – stepen vremenskog iskorišćenja date jedinice u datom vremeskom periodu.

**Broj proizvedenih komada** podsklopora, delova, gotovih proizvoda, itd. računa se pomoću sledećeg izraza:

$$b_i = \left\{ \begin{array}{c} \frac{k_{pi}}{t_i} \\ \frac{k_{ri}}{t_i} \\ \frac{k_{ei}}{t_i} \end{array} \right\} (\text{kom}) \quad (2.4.)$$

gde je

$t_i$  – potrebno vreme da se proizvede jedan komad određenog podsklopa, dela, gotovog proizvoda, itd.

## 2.2. ZADACI

**Zadatak 2.1.** Proizvodni sistem izrađuje jedan proizvod koji se sastoji iz 3 podskolopa (P1, P2 i P3) koji se izrađuju na tri različite mašine (M1, M2 i M3). Podsklop P1 se na mašini M1 izradi za 6 minuta, podsklop P2 se izradi na mašini M2 za 3 minuta, dok se podsklop P3 izradi na mašini M3 za 12 minuta. Vreme potrebno za održavanje mašina u radnom stanju iznosi na godišnjem nivou za mašinu M1, 24 dana, za mašinu M2, 12 dana i za mašinu M3, 40 dana. Izračunati koliko je gotovih proizvoda moguće proizvesti u ovom proizvodnom sistemu u vremenskom periodu od jedne godine.

### Rešenje:

Najpre se mora izračunati potencijalni kapacitet svih mašina proizvodnog sistema po obrascu (2.1.), pri čemu se polazi od sledećih vrednosti:

$m = 365$  – broj dana u godini,

$s = 3$  – broj smena u toku dana, i

$n = 8$  – broj sati u toku jedne smene.

Sledi:

$$K_{pi} = 365 \cdot 3 \cdot 8 = 8\,760 \text{ (čas/god)}$$

Nakon toga, računa se raspoloživi kapaciteti mašina po formuli (2.2.).

Za mašinu M1 (24 dana za održavanje puta 24 h) sledi:

$$K_{ri,m_1} = 8760 - 24 \cdot 24 = 8760 - 576 = 8\,184 \text{ (čas/god)} = 491\,040 \text{ (min/god)}$$

Za mašinu M2 (12 dana za održavanje puta 24 h) sledi:

$$K_{ri,m_2} = 8760 - 12 \cdot 24 = 8760 - 288 = 8\,472 \text{ (čas/god)} = 508\,320 \text{ (min/god)}$$

Za mašinu M3(40 dana za održavanje puta 24 h) sledi:

$$K_{ri,m_3} = 8760 - 40 \cdot 24 = 8760 - 960 = 7\,800 \text{ (čas/god)} = 468\,000 \text{ (min/god)}$$

U vremenskom periodu od 1 godine, može se izraditi sledeća količina podsklopova – izraz (2.4.):

Podsklop P1 (izrađuje se na mašini M1 – vreme izrade 6 min):

$$491040 : 6 = 81\,840 \text{ (kom/god)}$$

Podsklop P2 (izrađuje se na mašini M2 – vreme izrade 3 min):

$$508\,320 : 3 = 169\,440 \text{ (kom/god)}$$

Podsklop P3 (izrađuje se na mašini M3 – vreme izrade 12 min):

$$468000 : 12 = 39\ 000 \text{ (kom/god)}$$

Broj najmanje proizvedenih podsklopora određuje broj proizvedenih gotovih proizvoda na godišnjem nivou, te je stoga u proizvodnom sistemu datih karakteristika u vremenskom intervalu od godinu dana moguće proizvesti **39 000** komada gotovih proizvoda.

**Zadatak 2.2.** Fabrika proizvodi proizvod koji se sastoji iz 4 podsklopa (P1, P2, P3 i P4) i koji se obrađuju na 4 različite mašine (M1, M2, M3 i M4). Podsklop P1 obrađuje se na mašini M1 6 minuta, na mašini M2 6 minuta i na mašini M3 3 minuta. Podsklop P2 se obrađuje) na mašini M2 3 minuta. Podsklop P3 se obrađuje na mašini M3 12 minuta i na mašini M4 6 minuta. Podsklop P4 se obrađuje na mašini M1 3 minuta i na mašini M4 6 minuta. Na godišnjem nivou, vreme potrebno za održavanje normalne radne sposobnosti mašina iznosi: za mašinu M1 30 dana, za mašinu M2 14 dana, za mašinu M3 8 dana i za mašinu M4 20 dana. Fabrika radi 5 dana u nedelji u dve smene od po 8 sati. Izračunati koliko se proizvoda proizvede u fabrici za godinu dana.

### Rešenje:

Da bi se izračunao potencijalni kapacitet mašina, prvo se mora odrediti broj radnih dana u godini. Pošto se radi 5 dana u nedelji, preostala 2 dana su neradna. Na godišnjem nivou, broj neradnih dana se dobija tako što se množi ova dva neradna dana u nedelji sa brojem nedelja u godini koji iznosi 52, odnosno

$$2 \cdot 52 = 104 \text{ (neradna dana godišnje)}.$$

Shodno tome, broj radnih dana iznosi:

$$m = 365 - 104 = 261 \text{ (radnih dana/godišnje)}.$$

Dalje, na osnovu podataka iz teksta zadatka, vidi se da broj smena u toku radnog dana (s) iznosi 2, a broj radnih sati u toku jedne smene (n) iznosi 8. Na osnovu izraza (2.1.), potencijalni kapacitet mašina iznosi:

$$K_{pi} = 261 \cdot 2 \cdot 8 = 4\ 176 \text{ (čas/god)}$$

Nakon toga, računaju se raspoloživi kapaciteti mašina po formuli (2.2.).

Za mašinu M1 (30 dana za održavanje puta 24 h) sledi:

$$K_{ri,m_1} = 4176 - 30 \cdot 24 = 4176 - 720 = 3\ 456 \text{ (čas/god)}$$



Za mašinu M2 (14 dana za održavanje puta 24 h) sledi:

$$Kri, m_2 = 4176 - 14 \cdot 24 = 4176 - 336 = 3\ 840 \text{ (čas/god)}$$

Za mašinu M3 (8 dana za održavanje puta 24 h) sledi:

$$Kri, m_3 = 4176 - 8 \cdot 24 = 4176 - 192 = 3\ 984 \text{ (čas/god)}$$

Za mašinu M4 (20 dana za održavanje puta 24 h) sledi:

$$Kri, m_4 = 4176 - 20 \cdot 24 = 4176 - 480 = 3\ 696 \text{ (čas/god)}$$

U toku 1 godine, može se izraditi sledeća količina podsklopova – izraz (2.4.):

Podsklop P1:

$$\left. \begin{array}{l} - \text{ na mašini M1: } 3456 : 0,1 = 34\ 560 \text{ kom.} \\ - \text{ na mašini M2: } 3840 : 0,1 = 38\ 400 \text{ kom.} \\ - \text{ na mašini M3: } 3984 : 0,05 = 79\ 680 \text{ kom.} \end{array} \right\} \text{ P1: } 34\ 560 \text{ (kom/god)}$$

Podsklop P2:

$$- \text{ na mašini M2: } 3840 : 0,05 = 76\ 800 \text{ kom.} \quad \text{P2: } 76\ 800 \text{ (kom/god)}$$

Podsklop P3:

$$\left. \begin{array}{l} - \text{ na mašini M3: } 3984 : 0,2 = 19\ 920 \text{ kom.} \\ - \text{ na mašini M4: } 3696 : 0,1 = 36\ 960 \text{ kom.} \end{array} \right\} \text{ P3: } 19\ 920 \text{ (kom/god)}$$

Podsklop P4:

$$\left. \begin{array}{l} - \text{ na mašini M1: } 3456 : 0,05 = 69\ 120 \text{ kom.} \\ - \text{ na mašini M4: } 3696 : 0,1 = 36\ 960 \text{ kom.} \end{array} \right\} \text{ P4: } 36\ 960 \text{ (kom/god)}$$

Kao što se vidi iz proračuna, najmanji mogući broj proizvedenih komada na mašinama određuje broj podsklopova, a najmanji broj podsklopova određuje broj proizvedenih gotovih proizvoda. U proizvodnom sistemu datih karakteristika u vremenskom intervalu od godinu dana moguće je proizvesti **19 920** komada gotovih proizvoda.

**Zadatak 2.3.** Mala radionica koja poseduje jednu mašinu za proizvodnju kugličnih ležajeva radi u dve radne smene, u toku jedne smene se koristi pauza za odmor radnika od 0,5h, nedelje su neradne, dok je svaka druga subota radna. Takođe, radionica ne radi u vreme državnih praznika kojih ima 9. Ako je na godišnjem nivou potrebno na 22 dana zaustaviti mašinu kako bi se održala njena radna sposobnost i ako je za proizvodnju jednog kugličnog ležaja potrebno 30 sekundi uz stepen iskorišćenja 0,78, odrediti proizvodnu moć ove radionice (izračunati broj proizvedenih kugličnih ležajeva za godinu dana).

**Rešenje:**

Da bi se odredio efektivni kapacitet, prvo se mora odrediti efektivni broj radnih dana u godini ( $m_e$ ). To se radi tako što se od 365 (broj dana u godini) oduzmu svi neradni dani: svaka nedelja (52 u godini), svaka druga subota (26 u godini), državni praznici (9 u godini) i održavanje mašine (22 dana u godini), t.j.:

$$m_e = 365 - (52 + 26 + 9 + 22) = 365 - 109$$

$$m_e = 256 \text{ (dana/godišnje)}$$

Ostali elementi za proračun efektivnog kapaciteta su poznati (broj radnih smena u danu  $s_e = 2$ , efektivno radno vreme u toku smene  $n_e = 8 - 0,5 = 7,5\text{h}$  i stepen iskorišćenja  $\eta_e = 0,78$ ). Daje, koristi se izraz (2.3.) i dobija se efektivnog kapacitet mašine:

$$K_{ei} = 256 \cdot 2 \cdot 7,5 \cdot 0,78$$

$$K_{ei} = 2\,995,2 \text{ (čas/god)} = 179\,712 \text{ (min/god)}$$

Vreme potrebno za izradu jednog kugličnog ležaja je  $30\text{s} = 0,5 \text{ min}$ , pa se godišnje može proizvesti sledeći broj kugličnih ležajeva – izraz (2.4.):

$$b = 179\,712 : 0,5 = \mathbf{359\,424} \text{ (kom/god)}.$$

**Zadatak 2.4.** Fabrika poseduje tri mašine za izradu čačkalica i dve mašine za izradu palidrvaca šibice. Fabrika radi u dve radne smene, u toku jedne smene se koristi pauza za odmor radnika u trajanju od 0,5h. Subotom i nedeljom se ne radi. Fabrika ne radi ni u vreme državnih parznika kojih ima 9. Vreme potrebno za održavanje svake mašine za proizvodnju čačkalica na godišnjem nivou iznosi 18 dana, dok je vreme za godišnje održavanje svake mašine za proizvodnju palidrvaca 30 dana. Za proizvodnju čačkalica je potrebno 5 sekundi uz stepen iskorišćenja od 0,80, dok je za proizvodnju jednog palidrvca potrebno 10 sekundi uz stepen iskorišćenja od 0,90. Na osnovu prethodnih podataka izračunati proizvodnu moć ove fabrike (izračunati proizveden broj kutijica čačkalica i šibica za godinu dana ako se i i jedan i drugi proizvod pakuju i prodaju u kutijicama od po 50 komada).

**Rešenje:**

Prvo se mora odrediti efektivni broj radnih dana u godini ( $m_e$ ). To se radi tako što se od 365 (broj dana u godini) oduzmu svi neradni dani: svaka nedelja (52 u godini), svaka subota (52 u godini), državni praznici (9 u godini) i održavanje pojedinačnih mašina (18 dana u godini – mašina za izradu čačkalica, odnosno 30

dana u godini – mašina za izradu palidrvaca). Ostali elementi za proračun efektivnog kapaciteta su poznati – broj radnih smena na dan  $s_e = 2$ , efektivno radno vreme u toku smene  $n_e = 8 - 0,5 = 7,5$ h i stepen iskorišćenja  $\eta_e = 0,80$  – mašina za izradu čačkalica i  $\eta_e = 0,90$  – mašina za izradu palidrvaca). Efektivni kapacitet mašine računa se pomoću izraza (2.3.).

### **Čačkalice:**

$$m_e = 365 - (52 + 52 + 9 + 18) = 365 - 131$$

$$m_e = 234 \text{ (dana/godišnje)}$$

$$K_{ei} = 234 \cdot 2 \cdot 7,5 \cdot 0,80$$

$$K_{ei} = 2\,808 \text{ (čas/god)} = 168\,480 \text{ (min/god)}$$

Vreme potrebno za izradu jedne čačkalice iznosi  $5s = 0,0833$  min, pa se godišnje može proizvesti sledeći broj čačkalica po jednoj mašini – izraz (2.4.):

$$b = 168480 : 0,0833 = 2\,021\,760 \text{ (kom/god)}.$$

Broj kutijica čačkalica po jednoj mašini iznosi:

$$2021760 : 50 = 40\,435,2 \text{ (kom/god)}.$$

Pošto fabrika poseduje **tri mašine** za izradu čačkalica, ukupna proizvodnja kutijica čačkalica na godišnjem nivou iznosi:

$$40435,2 \cdot 3 = \mathbf{121\,305,6} \text{ (kom/god)}.$$

### **Šibice (palidrvci):**

$$m_e = 365 - (52 + 52 + 9 + 30) = 365 - 143$$

$$m_e = 222 \text{ (dana/godišnje)}$$

$$K_{ei} = 222 \cdot 2 \cdot 7,5 \cdot 0,90$$

$$K_{ei} = 2\,997 \text{ (čas/god)} = 179\,820 \text{ (min/god)}$$

Vreme potrebno za izradu jednog palidrvca iznosi  $10s = 0,166$  min, pa se godišnje može proizvesti sledeći broj palidrvaca po jednoj mašini – izraz (2.4.):

$$b = 179820 : 0,166 = 1\,078\,920 \text{ (kom/god)}.$$

Broj kutijica šibica po jednoj mašini iznosi:

$$1078920 : 50 = 21\,578,4 \text{ (kom/god)}.$$

Pošto fabrika poseduje **dve mašine** za izradu palidrvaca, ukupna proizvodnja kutijica šibica na godišnjem nivou iznosi:

$$21578,4 \cdot 2 = \mathbf{43\,156,8} \text{ (kom/god)}.$$

**Zadatak 2.5.** Proizvodni sistem izrađuje jedan proizvod koji se sastoji iz 4 podskolopa (P1, P2, P3 i P4) koji se izrađuju na četiri različite mašine (M1, M2, M3 i M4). Podsklop P1 se na mašini M1 izradi za 18 minuta, podsklop P2 se izradi na mašini M2 za 12 minuta, podsklop P3 se izradi na mašini M3 za 12 minuta, dok se podsklop P4 izradi na mašini M4 za 30 minuta. Vreme potrebno za održavanje mašina u radnom stanju iznosi na godišnjem nivou za mašinu M1, 35 dana, za mašinu M2, 30 dana, za mašinu M3, 18 dana i za mašinu M4, 10 dana. Pri tome je svaka nedelja neradna, kao i svaka druga subota. Takođe, proizvodni sistem ne radi za vreme državnih praznika kojih ima 11 na godišnjem nivou. Radi se u tri smene na dan, a iskorišćenje radnog vremena iznosi po 0,85 za mašine M1 i M4 i 0,75 za mašine M2 i M3. Izračunati koliko je gotovih proizvoda moguće proizvesti u ovom proizvodnom sistemu u vremenskom periodu od jedne godine

### Rešenje:

I ovde se prvo moraju odrediti elementi za proračun efektivnog kapaciteta mašina. Efektivni broj radnih dana u godini ( $m_e$ ) za svaku mašinu se određuje tako što se od 365 (broj dana u godini) oduzmu svi neradni dani: svaka nedelja (52 u godini), svaka druga subota (26 u godini), državni praznici (11 u godini) i održavanje mašina (35 dana u godini – mašina M1, 30 dana u godini – mašina M2, 18 dana u godini – mašina M3 i 10 dana u godini – mašina M4). Ostali elementi za proračun efektivnog kapaciteta su poznati – broj radnih smena na dan  $s_e = 3$ , efektivno radno vreme u toku smene  $n_e = 8h$  i stepen iskorišćenja  $\eta_e = 0,85$  – mašine M1 i M4 i  $\eta_e = 0,75$  – mašine M2 i M3). Efektivni kapacitet mašine računa se pomoću izraza (2.3.).

Za mašinu M1:

$$m_e = 365 - (52 + 26 + 11 + 35) = 365 - 124$$

$$m_e = 241 \text{ (dana/godišnje)}$$

$$K_{ei} = 241 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 0,85$$

$$K_{ei} = 4\,916,4 \text{ (čas/god)} = 294\,984 \text{ (min/god)}$$

Za mašinu M2:

$$m_e = 365 - (52 + 26 + 11 + 30) = 365 - 119$$

$$m_e = 246 \text{ (dana/godišnje)}$$

$$K_{ei} = 246 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 0,75$$

$$K_{ei} = 4\,428 \text{ (čas/god)} = 265\,680 \text{ (min/god)}$$

Za mašinu M3:

$$m_e = 365 - (52 + 26 + 11 + 18) = 365 - 107$$

$$m_e = 258 \text{ (dana/godišnje)}$$

$$K_{ei} = 258 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 0,75$$

$$K_{ei} = 4\,644 \text{ (čas/god)} = 278\,640 \text{ (min/god)}$$

Za mašinu M4:

$$m_e = 365 - (52 + 26 + 11 + 10) = 365 - 99$$

$$m_e = 266 \text{ (dana/godišnje)}$$

$$K_{ei} = 266 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 0,85$$

$$K_{ei} = 5\,426,4 \text{ (čas/god)} = 325\,584 \text{ (min/god)}$$

U vremenskom periodu od 1 godine, može se izraditi sledeća količina podsklopova – izraz (2.4.):

Podsklop P1 (izrađuje se na mašini M1 – vreme izrade 18 min):

$$294984 : 18 = 16\,388 \text{ (kom/god)}$$

Podsklop P2 (izrađuje se na mašini M2 – vreme izrade 12 min):

$$265680 : 12 = 22\,140 \text{ (kom/god)}$$

Podsklop P3 (izrađuje se na mašini M3 – vreme izrade 12 min):

$$278640 : 12 = 23\,220 \text{ (kom/god)}$$

Podsklop P4 (izrađuje se na mašini M4 – vreme izrade 30 min):

$$325584 : 30 = 10\,852,8 \text{ (kom/god)}$$

Najmanji mogući broj proizvedenih podsklopova određuje broj proizvedenih gotovih proizvoda. Shodno tome, u proizvodnom sistemu datih karakteristika u vremenskom intervalu od godinu dana moguće je proizvesti **10 852,8** komada gotovih proizvoda.



### **3. UTVRĐIVANJE REDOSLEDA ULAZA RADNIH NALOGA U PROCES RADA**

#### **3.1. TEORIJSKI UVOD**

Utvrdjivanje redosleda ulaza radnih naloga u proces rada ima za cilj određivanje optimalnog redosleda izvršenja radnih naloga koji obezbeđuje minimalno vreme trajanja ciklusa proizvodnje.

Rešenje se dobija tako što se određuju ukupna vremena trajanja ciklusa proizvodnje za sve kombinacije redosleda realizacije radnih naloga i bira se ona varijanta kod koje je vreme trajanja ciklusa proizvodnje najmanje. Pri tome se koristi odgovarajući grafik, sličan Gantogramu, sa vremenskom skalom po horizontali i sa svim kombinacijama redosleda radnih naloga u prvoj (vertikalnoj) koloni. Postupak rešavanja počinje nanošenjem na grafiku linije prve operacije radnog naloga na prvom radnom mestu. Dužina linije odgovara dužini trajanja te operacije. Onda se nanosi linija druge operacije istog radnog naloga na drugom radnom mestu. Linija se nanosi u nastavku prve linije, ali u sledećem redu (ispod prve linije kod sledećeg radnog mesta). Postupak se nastavlja dok se na grafiku ne nanesu sve operacije datog radnog naloga. Nakon toga, ponavlja se postupak za sledeći radni nalog, samo što se sada linije nanose u nastavku linija prethodnog radnog naloga po odgovarajućim operacijama i radnim mestima. Ovo se radi sve dok se ne na grafiku ne nanesu linije svih razmatranih radnih naloga. Onda se vrši učitavanje dužine trajanja ove kombinacije radnih naloga. Postupak se ponavlja za sve kombinacije radnih naloga, pri čemu se dobijaju različita ukupna vremena trajanja ciklusa proizvodnje. Na kraju, bira se ona kombinacija sa najkraćim ukupnim vremenom.

Ovaj postupak biće detaljno objašnjen na narednim primerima (zadacima).

### 3.2. ZADACI

**Zadatak 3.1.** U jednom proizvodnom pogonu na dva radna mesta sa po jednim tehnološkim sistemom (R1, R2) se izrađuje dva radna naloga (S1, S2). Svaki radni nalog se izrađuje na svakom radnom mestu. Vremena trajanja svih operacija radnih naloga na svim radnim mestima su data u tabeli 3.1.

**Tabela 3.1.** Vremena trajanja operacija radnih naloga na oba radna mesta

Radni nalog	Radno mesto	
	R1	R2
	Vreme trajanja operacije 1 $T_{iop1}$ (h)	Vreme trajanja operacije 2 $T_{iop2}$ (h)
S1	6	4
S2	4	3

Odrediti optimalni redosled izvršenja radnih naloga koji obezbeđuje minimalno vreme trajanja ciklusa proizvodnje.

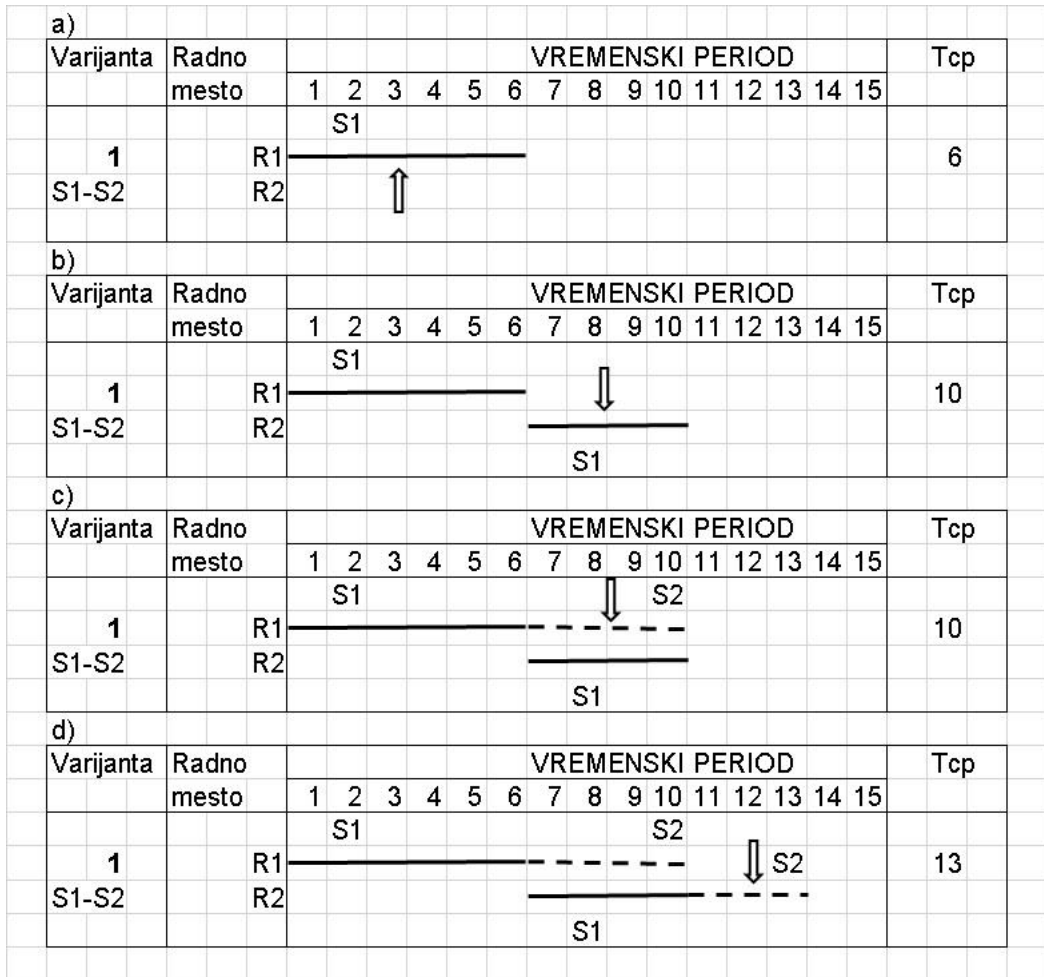
#### Rešenje:

Pošto se razmatraju dva radna naloga, postoje dve moguće varijante njihove realizacije – prvo da se realizuje radni nalog S1, a zatim S2 i obrnuto, prvo da se realizuje radni nalog S2, a potom S1.

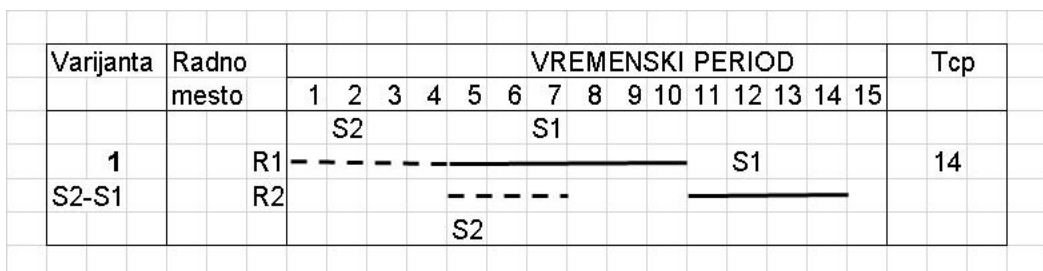
Najpre se rešava prva varijanta (S1 – S2). Razmatra se radni nalog S1. Kao što se vidi iz tabele 3.1. on se prvo mora realizovati na radnom mestu R1 u trajanju od 6 sati. Shodno tome, na grafiku se crta linija odgovarajuće dužine (obeležena je strelicom) u redu gde je postavljeno radno mesto R1 – slika 3.1. pod a). Dalje se nanosi linija istog radnog naloga, ali u redu za radno mesto R2 (obeležena je strelicom – slika 3.1. pod b)) i to u nastavku – od 6. do 10 sata. Trajanje operacije na ovom radnom mestu iznosi 4h. Time je završeno sa radnim nalogom S1. Sada se na grafik nanosi radni nalog S2. Ovde se prvo nanosi linija na radnom mestu R1 (obeležena je strelicom na grafiku 3.1. pod c) – isprekidana linija) i to u nastavku linije prvog radnog naloga S1. Trajanje ove operacije je 4h. Postupak se nastavlja i za radno mesto 2 – crta se u nastavku linije radnog naloga S1 (obeležena je strelicom na slici 3.1. pod d)). Ova operacija traje 3h. Time je rešena prva varijanta izvršenja radnih naloga i sa slike 3.1. se vidi da ona ukupno traje 13h.

Sada se razmatra druga kombinacija (S2 – S1). Postupak je identičan kao i kod rešavanja prve varijante i rešenje je prikazano na slici 3.2.





Slika 3.1. Grafik prve varijante izvršenja radnih naloga



Slika 3.2. Grafik druge varijante izvršenja radnih naloga

I ovde je prvo nanešena (isprekidana) linija prve operacije radnog naloga S2 u redu gde je radno mesto R1 u dužini od 4h, zatim je, u nastavku, naneta linija za radno mesto R2 u trajanju od 3h. Onda su nanete (pune) linije radnog naloga S1 u nastavku linija radnog naloga S2. Ono što se ovde vidi jeste da se linija radnog naloga S1 za radno mesto R2 ne postavlja odmah u nastavku isprekidane linije radnog

naloga S2, jer se taj radni nalog još uvek obrađuje na radnom mestu R1. To znači da radno mesto R2 mora da sačeka da se radni nalog S1 završi na radnom mestu R1 i tek onda tu može da se krene sa radom. Sa slike 3.2. se vidi da vreme čekanja iznosi 3h i to predstavlja gubitak vremena. Ukupno vreme realizacije ove varijante izvršenja radnih naloga iznosi 14h.

Na osnovu grafika na slikama 3.1. i 3.2. vidi se da je bolja prva varijanta (S1 – S2) jer ona traje kraće (13h) u odnosu na drugu varijantu (S2 – S1) koja traje 14h. Shodno tome, treba usvojiti prvu varijantu izvršenja radnih naloga jer je ona optimalna.

**Zadatak 3.2.** U jednom proizvodnom pogonu na tri radna mesta sa po jednim tehnološkim sistemom (R1, R2, R3) se izrađuje tri radna naloga (S1, S2, S3). Svaki radni nalog se izrađuje na svakom radnom mestu. Vremena trajanja svih operacija radnih naloga na svim radnim mestima su data u tabeli 3.2.

**Tabela 3.2.** Vremena trajanja operacija radnih naloga na svim radnim mestima

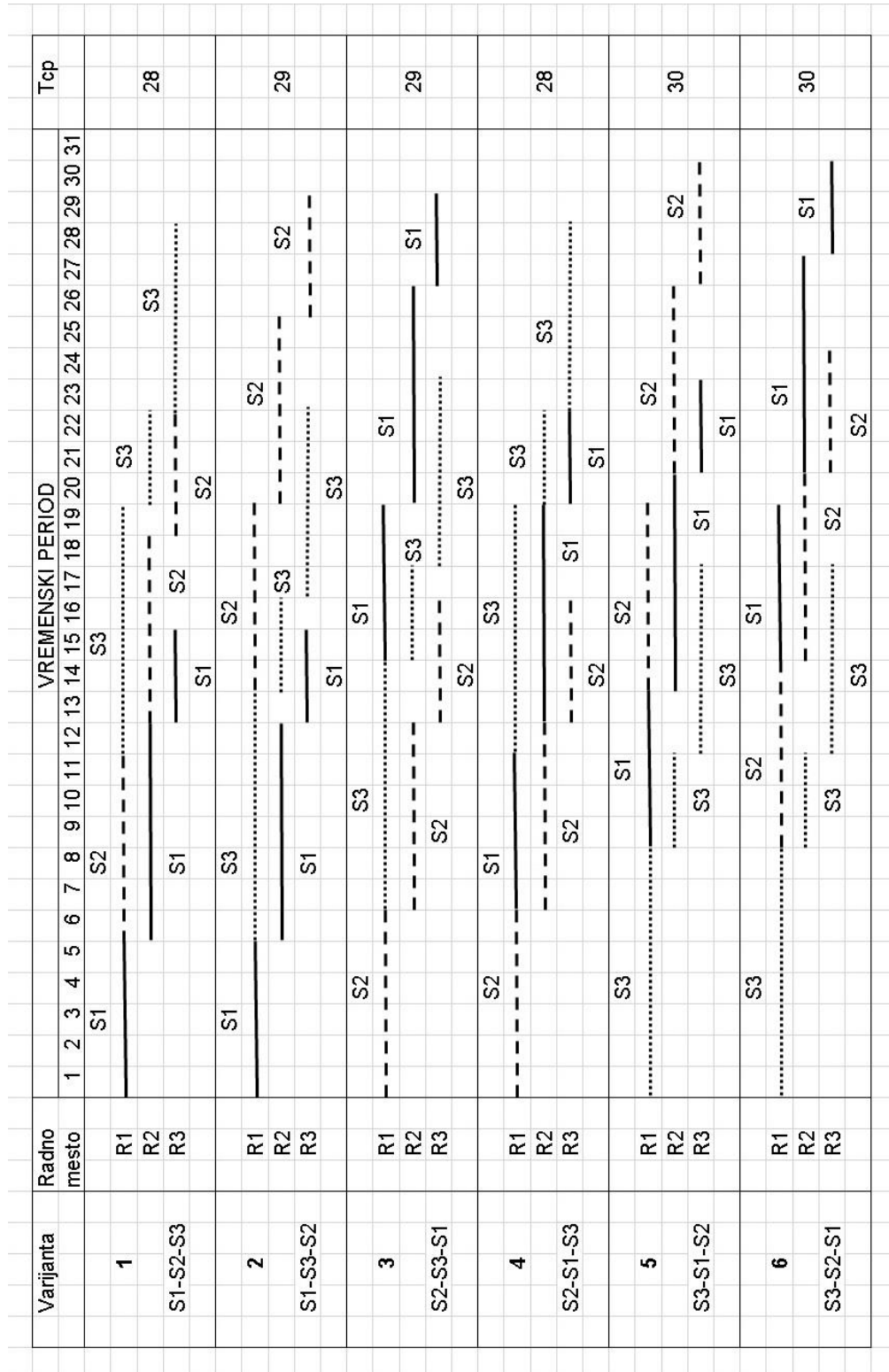
Radni nalog	Radno mesto		
	R1	R2	R3
	Vreme trajanja operacije 1 $T_{iop1}$ (h)	Vreme trajanja operacije 2 $T_{iop2}$ (h)	Vreme trajanja operacije 3 $T_{iop3}$ (h)
S1	5	7	3
S2	6	6	4
S3	8	3	6

Odrediti optimalni redosled izvršenja radnih naloga koji obezbeđuje minimalno vreme trajanja ciklusa proizvodnje.

### Rešenje:

Rešenje se dobija tako što se određuju vremena trajanja ciklusa proizvodnje za sve kombinacije redosleda realizacije radnih naloga i bira se ona varijanta kod koje je vreme trajanja ciklusa proizvodnje najmanje. U tom smislu se koristi sledeći grafik – slika 3.3.:

Optimalno rešenje predstavljaju dve varijante – varijanta 1 (redosled realizacije radnih naloga je S1-S2-S2) i varijanta 4 (redosled realizacije radnih naloga je S2-S1-S3), gde su vremena trajanja ciklusa proizvodnje najkraća – 28h.



Slika 3.3. Grafik svih varijanti izvršenja radnih naloga

Ako posmatramo vremena čekanja (gubitak vremena), kod varijante 1 čeka se ukupno 21h (5h za početak rada na radnom nalogu S1 na radnom mestu R2, 12h za početak rada na radnom nalogu S1 na radnom mestu R3, 1h na radnom mestu R2 između radnih naloga S2 i S3 i 3h na radnom mestu R3 između radnih naloga S1 i S2). Sa druge strane, kod varijante 4 ukupno vreme čekanja iznosi takođe, 21h – 6h za početak rada na radnom nalogu S1 na radnom mestu R2, 12h za početak rada na radnom nalogu S1 na radnom mestu R3 i 3h na radnom mestu R3 između radnih naloga S2 i S1. Sa tog aspekta, obe varijante su optimalne i menadžer zadržava pravo da odluči koju od ove dve varijante će izabrati.

**Zadatak 3.3.** U jednom proizvodnom pogonu na tri radna mesta sa po jednim tehnološkim sistemom (R1, R2, R3) se izrađuje tri radna naloga (S1, S2, S3). Svaki radni nalog se izrađuje na svakom radnom mestu. Vremena trajanja svih operacija radnih naloga na svim radnim mestima su data u tabeli 3.3.

**Tabela 3.3.** Vremena trajanja operacija radnih naloga na svim radnim mestima

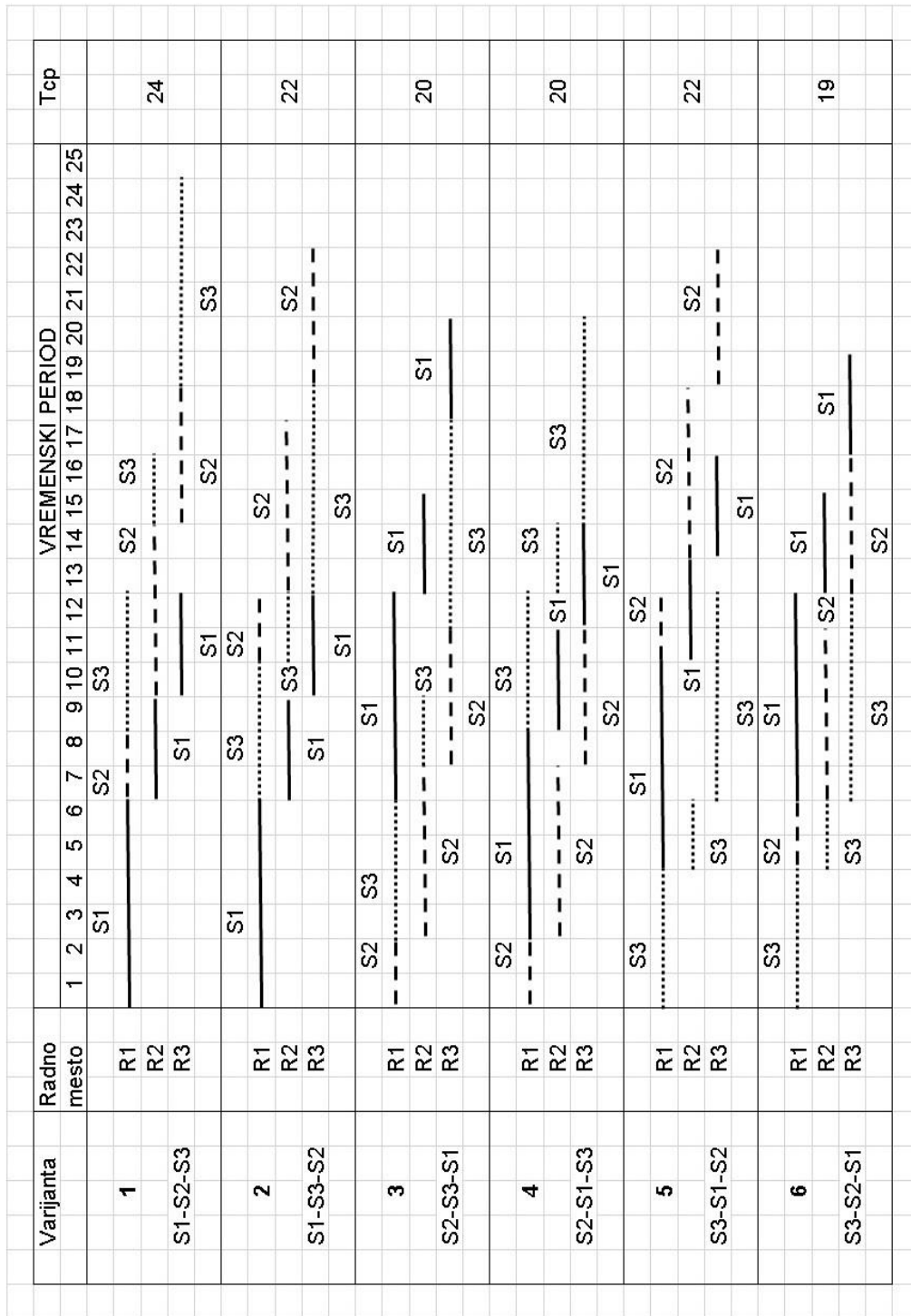
Radni nalog	Radno mesto		
	R1	R2	R3
	Vreme trajanja operacije 1 $T_{iop1}$ (h)	Vreme trajanja operacije 2 $T_{iop2}$ (h)	Vreme trajanja operacije 3 $T_{iop3}$ (h)
S1	6	3	3
S2	2	5	4
S3	4	2	6

Odrediti optimalni redosled izvršenja radnih naloga koji obezbeđuje minimalno vreme trajanja ciklusa proizvodnje.

### Rešenje:

Rešenje se dobija tako što se na grafiku postave sve kombinacije redosleda realizacije radnih naloga i bira se ona varijanta kod koje je vreme trajanja ciklusa proizvodnje najmanje. Rešenje je prikazano na sledećem grafiku – slika 3.4.:

Sa grafika 3.4. se vidi da optimalno rešenje predstavlja varijanta 6 gde je redosled realizacije radnih naloga S3-S2-S1 i gde je vreme trajanja ciklusa proizvodnje najkraće – 19h. Gubici vremena kod ove varijante su najkraći i iznose 11h.



SIKKA 3.4. Grafik svih varijanti izvršenja radnih naloga

**Zadatak 3.4.** U jednom proizvodnom pogonu na tri radna mesta sa po jednim tehnološkim sistemom (R1, R2, R3) se izrađuje tri radna naloga (S1, S2, S3). Svaki radni nalog se izrađuje na svakom radnom mestu. Vremena trajanja svih operacija radnih naloga na svim radnim mestima su data u tabeli 3.4.

**Tabela 3.4.** Vremena trajanja operacija radnih naloga na svim radnim mestima

Radni nalog	Radno mesto		
	R1	R2	R3
	Vreme trajanja operacije 1 $T_{iop1}$ (h)	Vreme trajanja operacije 2 $T_{iop2}$ (h)	Vreme trajanja operacije 3 $T_{iop3}$ (h)
S1	1	7	2
S2	2	3	8
S3	3	4	5

Odrediti optimalni redosled izvršenja radnih naloga koji obezbeđuje minimalno vreme trajanja ciklusa proizvodnje i odrediti ukupne gubitke vremena (ukupno vreme čekanja radnih naloga na svim radnim mestima) za sve kombinacije.

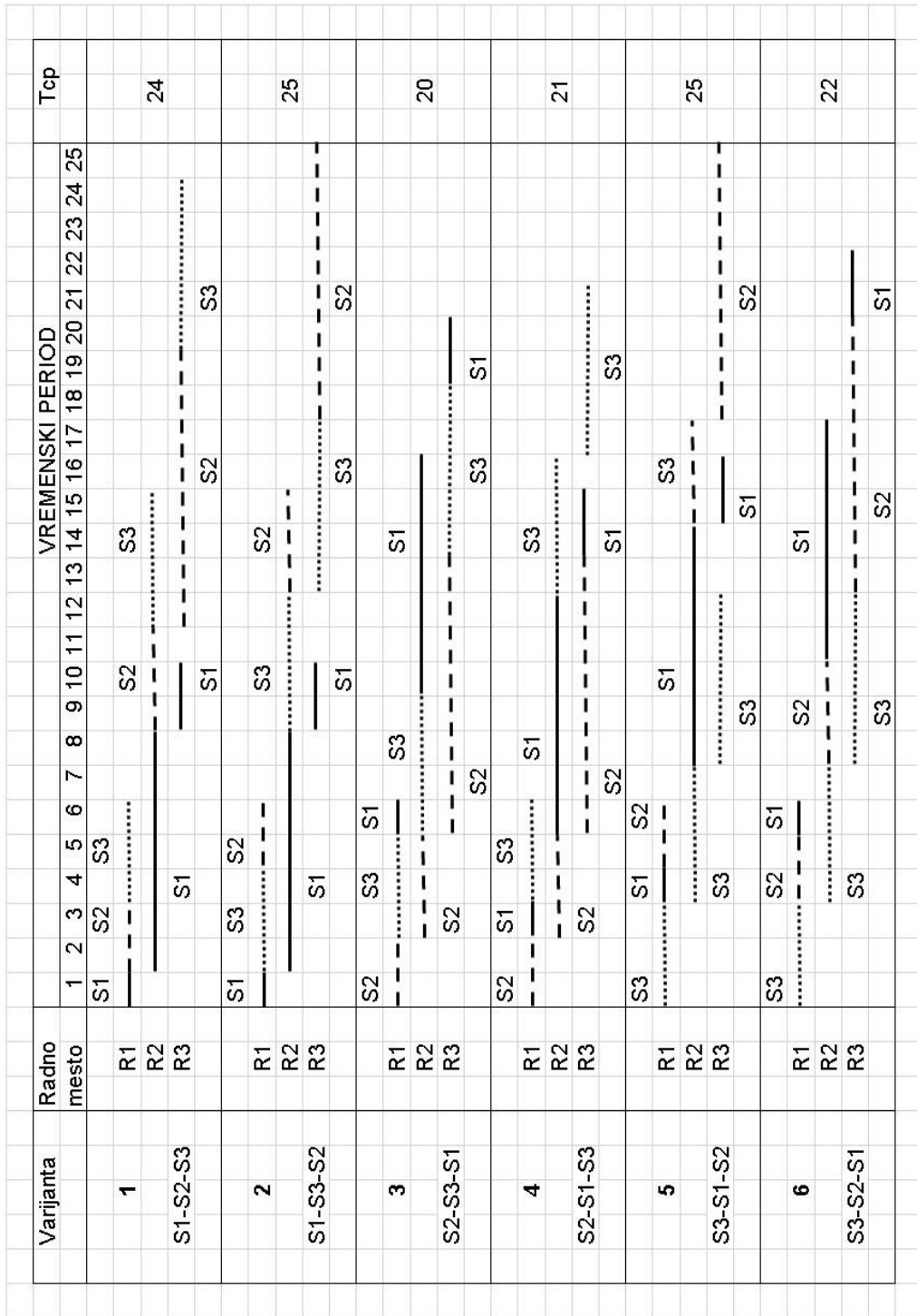
### Rešenje:

Do rešenja se dolazi tako što se na grafiku postave sve kombinacije redosleda realizacije radnih naloga. Najbolje rešenje predstavlja ona varijanta kod koje je vreme trajanja ciklusa proizvodnje najmanje. Rešenje je prikazano na grafiku – slika 3.5.

Sa grafika 3.5. se vidi da optimalno rešenje predstavlja varijanta 4 sa redosledom realizacije radnih naloga S2-S3-S1 i gde je vreme trajanja ciklusa proizvodnje najkraće – 20h.

Gubici vremena iznose za:

- varijantu 1 – 10h (0h na R1, 1h na R2 i 9h na R3),
- varijantu 2 – 11h (0h na R1, 1h na R2 i 10h na R3),
- varijantu 3 – 7h (0h na R1, 2h na R2 i 5h na R3),
- varijantu 4 – 8h (0h na R1, 2h na R2 i 6h na R3),
- varijantu 5 – 13h (0h na R1, 3h na R2 i 10h na R3),
- varijantu 6 – 10h (0h na R1, 3h na R2 i 7h na R3).



Slika 3.5. Grafik svih varijanti izvršenja radnih naloga

**Zadatak 3.5.** U jednom proizvodnom pogonu na dva radna mesta (R1, R2) se izrađuje dva radna naloga (S1, S2). Svaki radni nalog se izrađuje najpre na prvom radnom mestu (R1), zatim na drugom radnom mestu (R2), pa se onda ponovo vraća na prvo radno mesto (R1), ali nakon izrade drugog radnog naloga na radnom mestu (R1), čime se završava njegova realizacija. Vremena trajanja svih operacija radnih naloga na svim radnim mestima su data u tabeli 3.5.

**Tabela 3.5.** Vremena trajanja operacija radnih naloga na svim radnim mestima

Radni nalog	Radno mesto		
	R1	R2	R1
	Vreme trajanja operacije 1 $T_{iop1}$ (h)	Vreme trajanja operacije 2 $T_{iop2}$ (h)	Vreme trajanja operacije 3 $T_{iop1}$ (h)
S1	5	3	1
S2	4	7	2

Odrediti optimalni redosled izvršenja radnih naloga koji obezbeđuje minimalno vreme trajanja ciklusa proizvodnje i odrediti ukupne gubitke vremena (ukupno vreme čekanja radnih naloga na svim radnim mestima) za sve kombinacije.

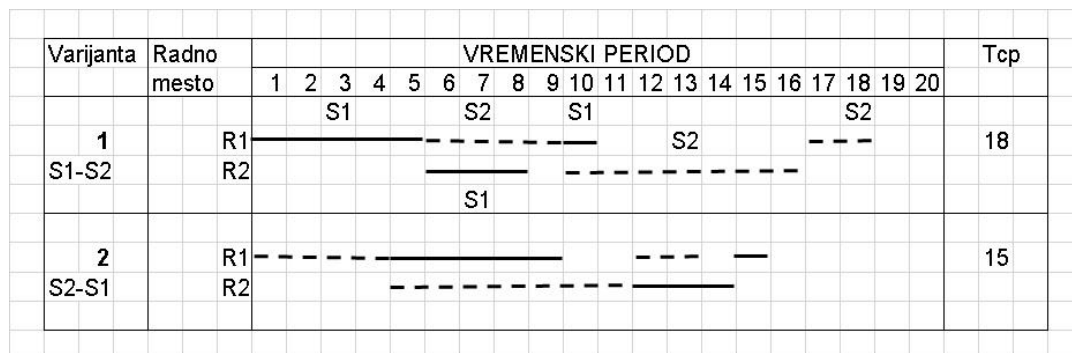
### Rešenje:

Do rešenja se dolazi na isti način kao kod prethodnih zadataka. Rešenje je prikazano na grafiku – slika 3.6.

Sa grafika 3.6. se vidi da optimalno rešenje predstavlja varijanta 2 (redosled realizacije radnih naloga je S2-S1) sa vremenom trajanja ciklusa proizvodnje od 15h.

Gubici vremena iznose za:

- varijantu 1 – 12h (6h na R1 i 6h na R2),
- varijantu 2 – 7h (3h na R1 i 4h na R2).



**Slika 3.6.** Grafik svih varijanti izvršenja radnih naloga



## 4. OPTEREĆENJE RADNIH MESTA RADNIM NALOZIMA

### 4.1. TEORIJSKI UVOD

Opterećenje radnih mesta radnim nalogima se određuje u okviru procesa terminiranja. Cilj je da se utvrdi opterećenja radnih mesta u vremenu. U datom postupku se računaju ukupni sati ili broj radnih naloga da bi se odredilo koje porudžbine mogu biti isporučene i koji su kapaciteti preopterećeni. Pri tome, ne postavlja se detaljan terminski plan operacija.

Kod određivanja toka izvođenja postupaka rada, koristi se prosečno vreme čekanja operacija radnih naloga, koje je prethodno određeno. Ovo predstavlja suprotan postupak u odnosu na detaljni proces terminiranja, gde se u obzir uzimaju razni poremećaji kod realizacije operacija i gde se precizno izračunava vreme provedeno u svakom redu čekanja (između operacija).

Opterećenje kapaciteta radnih mesta se vrši na dva načina:

- Opterećenje radnih mesta radnim nalogima metodom unapred.
- Opterećenje radnih mesta radnim nalogima metodom unazad.

**Opterećenje radnih mesta radnim nalogima metodom unapred** se određuje tako što se uzima početak opterećenja kapaciteta u trenutku posmatranja i u odnosu na njega se postavljaju radni nalozi za naredne vremenske periode – unapred. Pri tome se vreme izvođenja operacija na svakom tehnološkom sistemu akumulira, a raspoloživi kapacitet se uzima kao neograničen ili ograničen. Cilj primene ove metode opterećenja kapaciteta je da se odrede približni rokovi završetaka radnih naloga i da se u slučaju kada je kapacitet neograničen odredi potreban kapacitet u svakom vremenskom trenutku.

**Opterećenje kapaciteta radnih mesta radnim nalogima metodom unazad** se određuje tako što se ovde kao polazni termini utvrđivanja opterećenja kapaciteta uzimaju zahtevani rokovi završetaka radnih naloga. Određivanje opterećenja kapaciteta vremenima trajanja operacija se vrši po vremenskoj skali unazad od termina završetaka za svako radno mesto. primene ove metode opterećenja kapaciteta je da se proračunaju potrebni kapaciteti svakog radnog mesta i to u

svakom vremenskom periodu. Karakteristika ove metode je da su uvek tačno postavljeni rokovi završetaka radnih naloga.

Nakon formiranja vremenske slike stanja svih radnih naloga (važi za obe metode), pristupa se izradi dijagrama opterećenja radnih mesta. To se radi tako što se redom svaki radni nalog nanosi u odgovarajućem vremenu u određenom radnom danu (odgovarajućim stupcima na grafiku). Grafik se sastoji od dve skale – horizontalne gde se nanose radni dani i vertikalne gde se nanose radni sati i odakle se čita opterećenje po radnim danima. Grafik se radi za svako radno mesto. Kada se završi ovaj postupak za sve radne naloge, dobija se dijagram gde se tačno vidi opterećenje radnih mesta radnim nalogima po danima. Ceo navedeni postupak biće detaljno objašnjen preko primera (zadataka) koji su detaljno obrađeni u narednom tekstu.

## 4.2. OPTEREĆENJE RADNIH MESTA RADNIM NALOZIMA METODOM UNAPRED

**Zadatak 4.1.** U jednom proizvodnom pogonu na tri radna mesta sa po jednim tehnološkim sistemom (RM1, RM2, RM3) se izrađuje četiri radnih naloga (R1, R2, R3, R4), koje treba vremenski raspodeliti na data radna mesta. Vremena potrebna za izradu svakog radnog naloga na svakom radnom mestu su data u tabeli 4.1.

**Tabela 4.1.** Vremena potrebna za izradu svakog radnog naloga na svakom radnom mestu

Radni nalog	Radno mesto / vreme trajanja operacija (h)	Rok završetka (dan)
R1	RM1/3, RM2/4, RM3/5	4
R2	RM2/4, RM3/3, RM1/2	4
R3	RM3/5, RM1/4	3
R4	RM3/3, RM2/4, RM1/3	4

Pretpostavka je da su raspoloživa vremena rada tehnoloških sistema jedina ograničavajuća veličina. Veći deo vremena radni nalozi provode u transportu i čekanju na izvršenje operacija obrade. Prosečno vreme transporta i čekanja je 8 h po svakom radnom mestu. Vreme trajanja efektivnog radnog dana je 8 h. Vremenski raspored opterećenja kapaciteta radnih mesta radnim nalogima odrediti metodom unapred.

### Rešenje:

Prvi korak je konstrukcija vremenske slike stanja za svaki radni nalog – slika 4.1. Za proračun opterećenja se usvaja efektivni radni dan u trajanju od 8 sati.

Početak vremenske slike stanje je sadašnji trenutak – vreme 0 (nula) za svaki radni nalog, jer se opterećenje kapaciteta vrši metodom unapred. Konstrukcija vremenske slike stanja se izvodi na sledeći način: radni nalog R1 utroši 3 sata na radnom mestu RM1, zatim provede 8 sati na čekanje i transport prema radnom mestu RM2 gde se obrađuje naredna 4 sata. Nakon toga opet ovaj radni nalog provede 8 sati u čekanju i transportu do radnog mesta RM3, a na datom rednom mestu obrada traje 5 sata. Sa slike 4.1. se vidi da se obrada R1 na radnom mestu RM1 izvršava u potpunosti u I radnom danu, na radnom mestu RM2 u potpunosti u II radnom danu, a na radnom mestu RM3 se deli na 1 sat u III radnom danu i 4 sat u IV radnom danu. Na isti način se analiziraju ostali radni nalozi, odnosno:

- Radni nalog R2 – 4h na radnom mestu RM2 – 8h čekanje i transport – 3h na radnom mestu RM3 – 8h čekanje i transport – 2h na radnom mestu RM1.
- Radni nalog R3 – 5h na radnom mestu RM3 – 8h čekanje i transport – 4h na radnom mestu RM1.
- Radni nalog R4 – 3h na radnom mestu RM3 – 8h čekanje i transport – 4h na radnom mestu RM2 – 8h čekanje i transport – 3h na radnom mestu RM1.

U drugom koraku se vrši izrada dijagrama opterećenja radnih mesta (RM1, RM2 i RM3) na osnovu proračunatih vremenskih slika stanja – slika 4.2.

Izrada dijagrama za svako radno mesto se izvodi na sledeći način: unosi se radni nalog R1 na radno mesto RM1 u vremenu od 3 sata u I radnom danu, 4 sata na radnom mestu RM2 u II radnom danu, 1 sat na radnom mestu RM3 u III radnom danu i 4 sata na radnom mestu RM3 u IV radnom danu. Postupak se nastavlja sa ostalim radnim nalogima i to:

- Radni nalog R2:

Unosi se radni nalog R2 na radno mesto RM2 u vremenu od 4h u I radnom danu.  
Unosi se radni nalog R2 na radno mesto RM3 u vremenu od 3h u II radnom danu.  
Unosi se radni nalog R2 na radno mesto RM1 u vremenu od 1h u III radnom danu.  
Unosi se radni nalog R2 na radno mesto RM1 u vremenu od 1h u IV radnom danu.

- Radni nalog R3:

Unosi se radni nalog R3 na radno mesto RM3 u vremenu od 5h u I radnom danu.  
Unosi se radni nalog R3 na radno mesto RM1 u vremenu od 3h u II radnom danu.  
Unosi se radni nalog R3 na radno mesto RM1 u vremenu od 1h u III radnom danu.

- Radni nalog R4:

Unosi se radni nalog R4 na radno mesto RM3 u vremenu od 3h u I radnom danu.  
Unosi se radni nalog R4 na radno mesto RM2 u vremenu od 4h u II radnom danu.  
Unosi se radni nalog R4 na radno mesto RM1 u vremenu od 1h u III radnom danu.  
Unosi se radni nalog R4 na radno mesto RM1 u vremenu od 2h u IV radnom danu.

Na osnovu slike 4.2. opterećenje radnih mesta radnim nalogima je sledeće:

- Radno mesto RM1:

Sva četiri radna dana opterećenje iznosi po 3h.

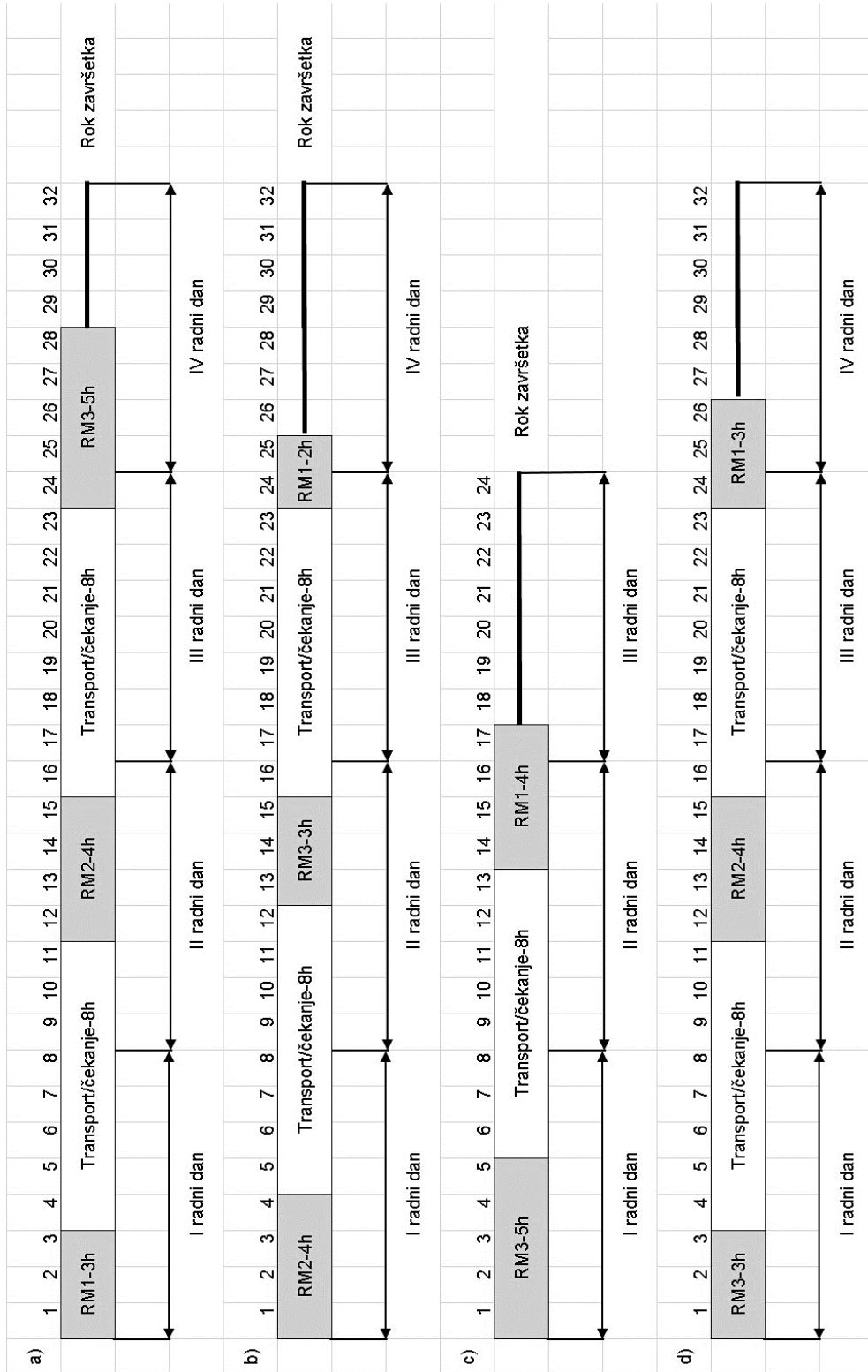
- Radno mesto RM2:

I radnog dana opterećenje iznosi 4h, II dana 8h, a III i IV dana nema opterećenja.

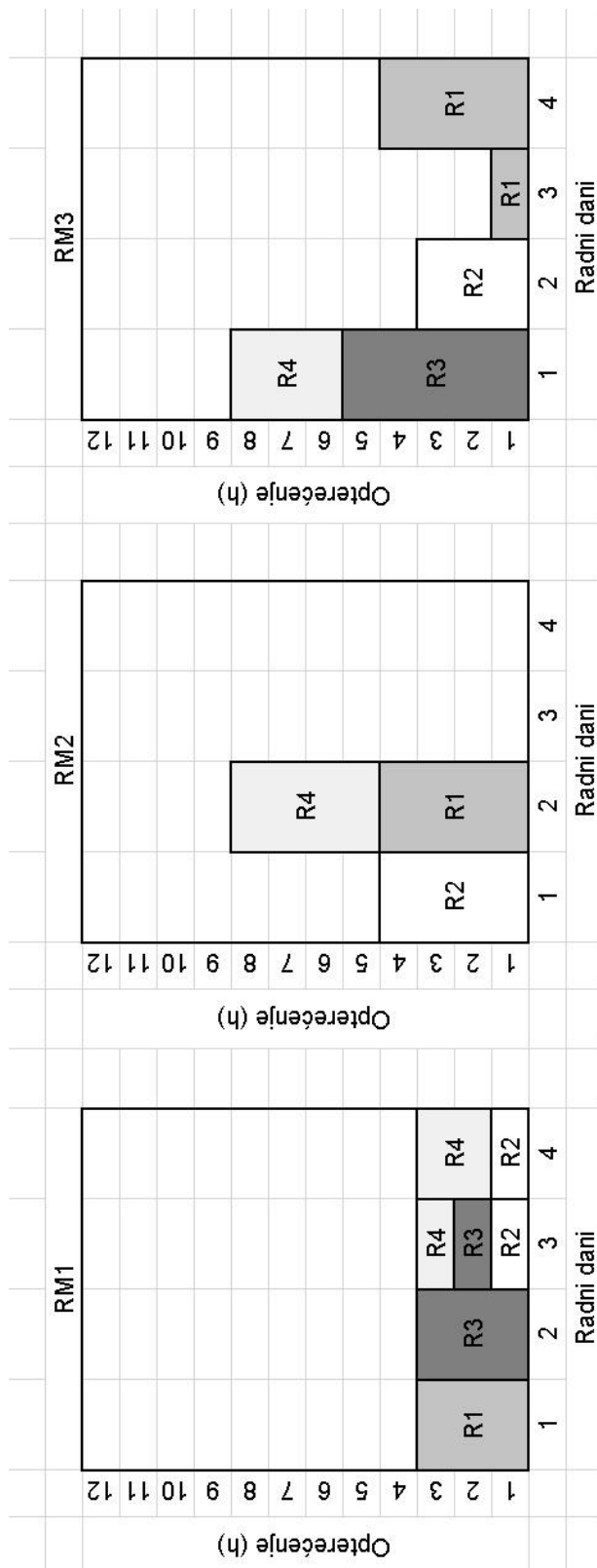
- Radno mesto RM3:

I radnog dana opterećenje iznosi 8h, II dana 3h, III dana 1h i IV dana 4h.

Nema preopterećenja radnih mesta (opterećenje iznad 8h po danu).



Slika 4.1. Grafik vremenskih slika stanja radnih naloga. a) vremenska slika stanja radnog naloga R.1. b) vremenska slika stanja radnog naloga R.2. c) vremenska slika stanja radnog naloga R.3. d) vremenska slika stanja radnog naloga R.4.



Slika 4.2. Dijagram opterećenja radnih mesta radnim nalogima

**Zadatak 4.2.** U proizvodnom pogonu preduzeća „Polet” se na četiri radna mesta koja imaju identične tehnološke sisteme (RM1, RM2, RM3 i RM4) izrađuju tri proizvoda – radna naloga (R1, R2 i R3), koje treba vremenski raspodeliti na data radna mesta. Vremena potrebna za izradu svakog radnog naloga na svakom radnom mestu su data u tabeli 4.2.

**Tabela 4.2.** Vremena potrebna za izradu svakog radnog naloga na svakom radnom mestu

Radni nalog	Radno mesto / vreme trajanja operacija (h)	Rok završetka (dan)
R1	RM1/4, RM2/2, RM3/3, RM4/2	3
R2	RM2/6, RM3/2, RM4/3	3
R3	RM4/5, RM3/7	2

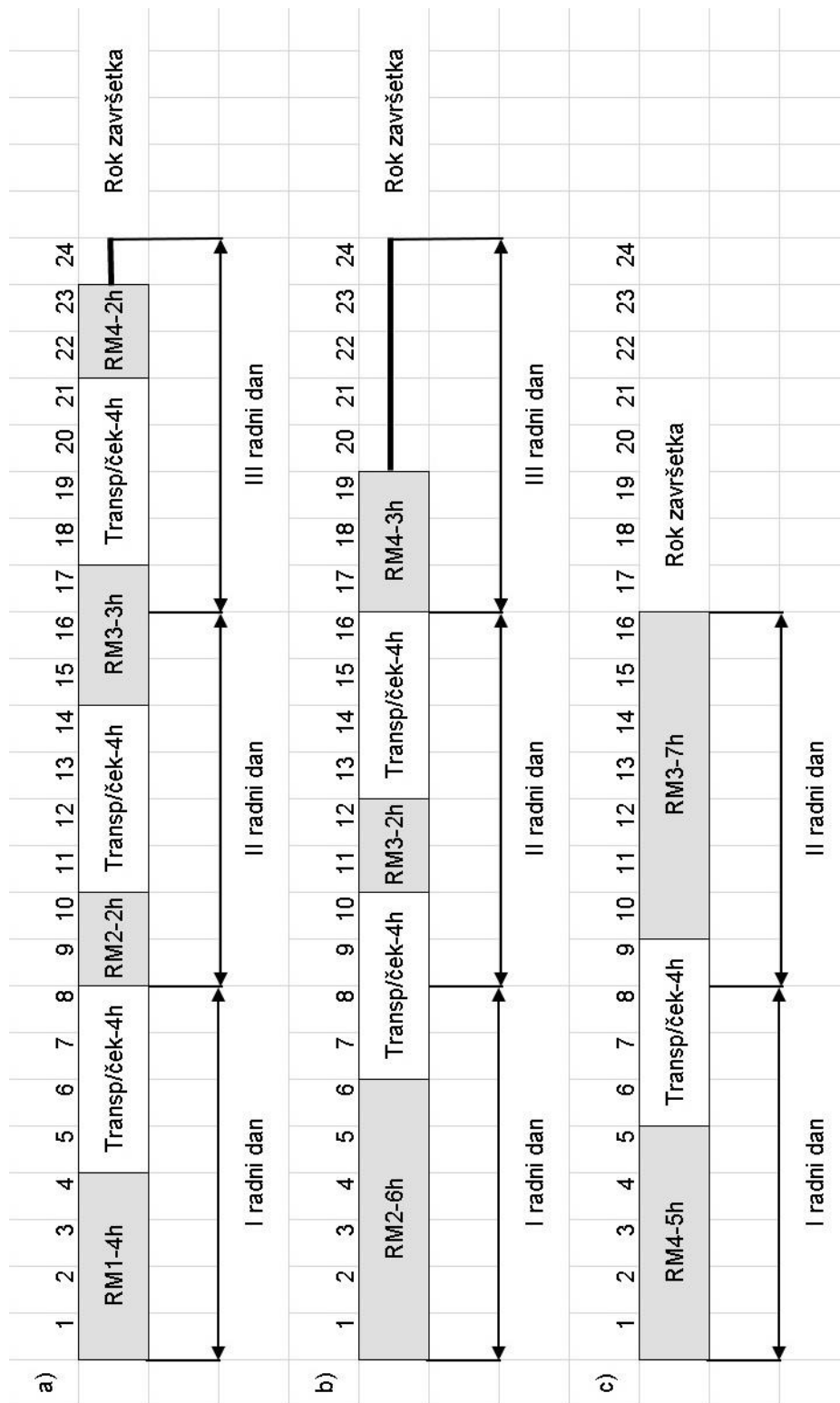
Merenjem u sistemu je određeno da je prosečno vreme transporta i čekanja 4h po svakom radnom mestu. Vreme trajanja efektivnog radnog dana je 8 h. Vremenski raspored opterećenja kapaciteta radnih mesta radnim nalogima odrediti metodom unapred.

### Rešenje:

Kao i kod prethodnog zadatka, u prvom koraku se vrši konstrukcija vremenske slike stanja za svaki radni nalog – slika 4.3. Za proračun opterećenja se usvaja efektivni radni dan u trajanju od 8 sati. Konstrukcija vremenske slike stanja se izvodi na sledeći način:

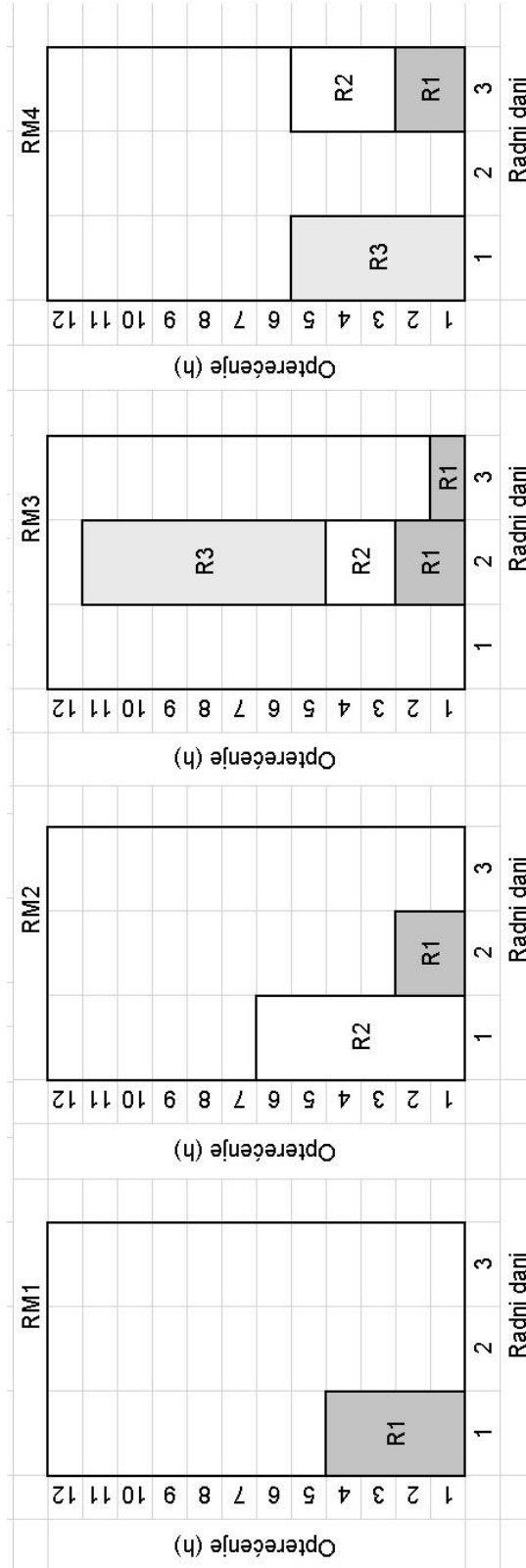
- Radni nalog R1 – 4h na radnom mestu RM1 – 4h čekanje i transport – 2h na radnom mestu RM2 – 4h čekanje i transport – 3h na radnom mestu RM3 – 4h čekanje i transport – 2h na radnom mestu RM4.
- Radni nalog R2 – 6h na radnom mestu RM2 – 4h čekanje i transport – 2h na radnom mestu RM3 – 4h čekanje i transport – 3h na radnom mestu RM4.
- Radni nalog R3 – 5h na radnom mestu RM4 – 4h čekanje i transport – 7h na radnom mestu RM3.

U drugom koraku se vrši izrada dijagrama opterećenja radnih mesta (RM1, RM2, RM3 i RM4) na osnovu proračunatih vremenskih slika stanja – slika 4.4.



**Slika 4.3.** Grafik vremenskih slika stanja radnih naloga. a) vremenska slika stanja radnog naloga R.1. b) vremenska slika stanja radnog naloga R.2. c) vremenska slika stanja radnog naloga R.3.





Slika 4.4. Dijagram opterećenja radnih mesta radnim nalozima

Izrada dijagrama za svako radno mesto se izvodi na sledeći način:

– Radni nalog R1:

Unosi se radni nalog R1 na radno mesto RM1 u vremenu od 4h u I radnom danu.

Unosi se radni nalog R1 na radno mesto RM2 u vremenu od 2h u II radnom danu.

Unosi se radni nalog R1 na radno mesto RM3 u vremenu od 2h u II radnom danu.

Unosi se radni nalog R1 na radno mesto RM3 u vremenu od 1h u III radnom danu.

Unosi se radni nalog R1 na radno mesto RM4 u vremenu od 2h u III radnom danu.

– Radni nalog R2:

Unosi se radni nalog R2 na radno mesto RM2 u vremenu od 6h u I radnom danu.

Unosi se radni nalog R2 na radno mesto RM3 u vremenu od 2h u II radnom danu.

Unosi se radni nalog R2 na radno mesto RM4 u vremenu od 3h u III radnom danu.

– Radni nalog R3:

Unosi se radni nalog R3 na radno mesto RM4 u vremenu od 5h u I radnom danu.

Unosi se radni nalog R3 na radno mesto RM3 u vremenu od 7h u II radnom danu.

Na osnovu slike 4.4. opterećenje radnih mesta radnim nalogima je sledeće:

– Radno mesto RM1:

I radnog dana opterećenje iznosi 4h. Ostalih dana nema opterećenja.

– Radno mesto RM2:

I radnog dana opterećenje iznosi 6h, II dana 2h, a III dana nema opterećenja.

– Radno mesto RM3:

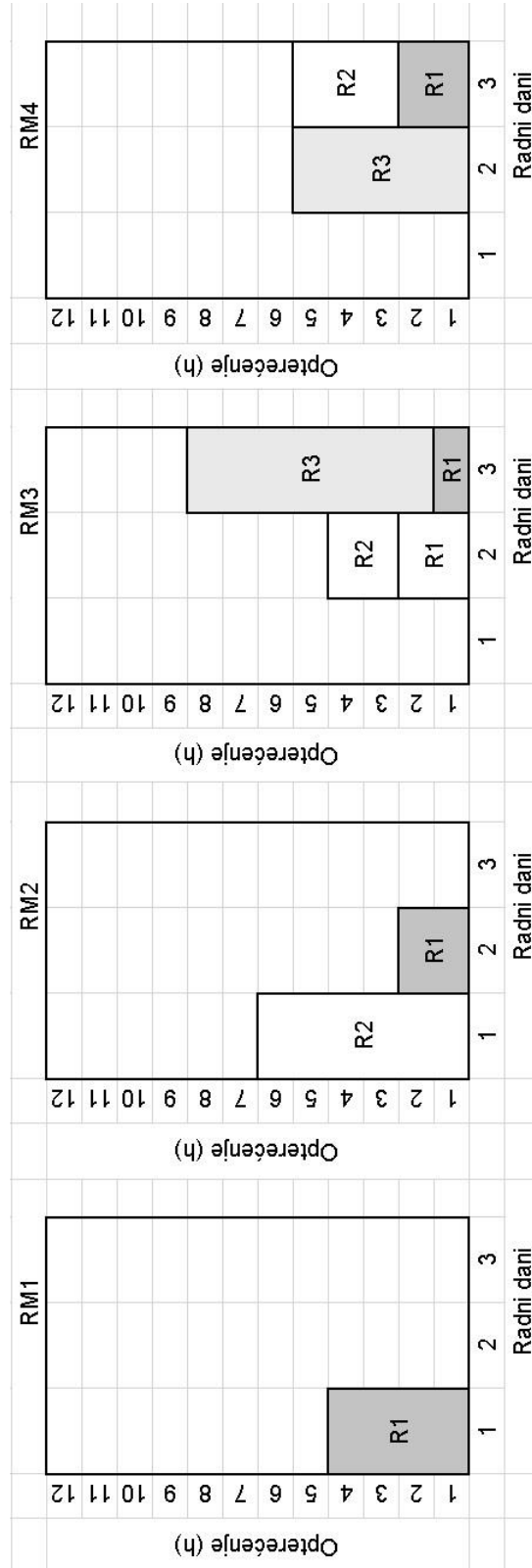
I radnog dana nema opterećenja, II dana opterećenje iznosi 11h, a III 1h.

– Radno mesto RM4:

I radnog dana opterećenje iznosi 5h, II dana 0h i III dana 5h.

Nema preopterećenja radnih mesta (opterećenje iznad 8h po danu), osim na radnom mestu RM3 (II dana – 11h).

Rešenje preopterećenja može se postići pomeranjem ulaza radnog naloga R3 na II radni dan, pri čemu će dati radni nalog kasniti 1 dan. Ukoliko potrošači prihvataju dato kašnjenje, opterećenje kapaciteta radnih mesta bi bilo uravnoteženo – slika 4.5.



Slika 4.5. Dijagram opterećenja radnih mesta radnim nalozima, nakon uravnoteženja

**Zadatak 4.3.** U proizvodnom pogonu preduzeća se na četiri radna mesta koja imaju identične tehnološke sisteme (RM1, RM2, RM3 i RM4) izrađuju pet proizvoda – radna naloga (R1, R2, R3, R4 i R5), koje treba vremenski raspodeliti na data radna mesta. Vremena potrebna za izradu svakog radnog naloga na svakom radnom mestu su data u tabeli 4.3.

**Tabela 4.3.** Vremena potrebna za izradu svakog radnog naloga na svakom radnom mestu

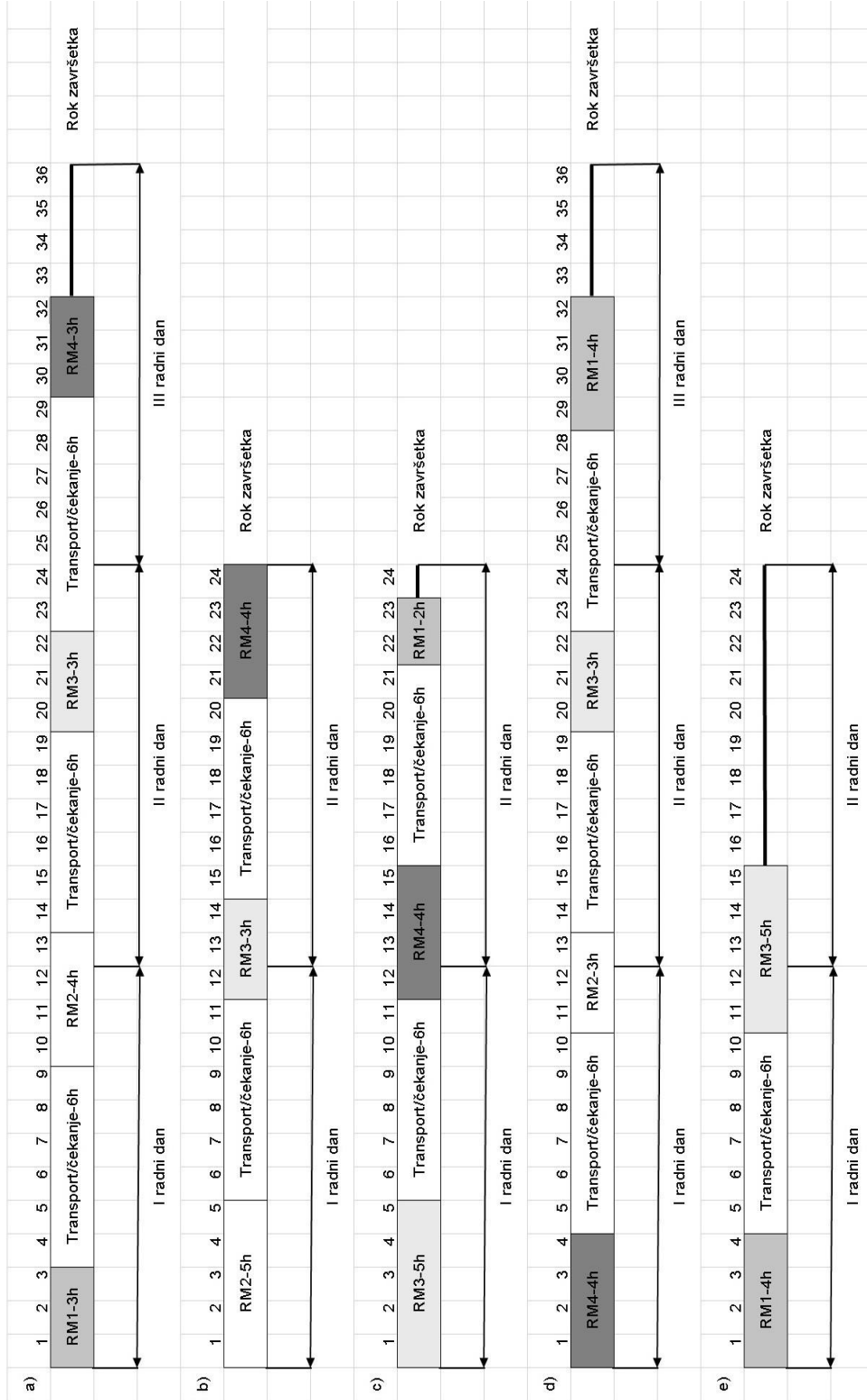
Radni nalog	Radno mesto / vreme trajanja operacija (h)	Rok završetka (dan)
R1	RM1/3, RM2/4, RM3/3, RM4/3	3
R2	RM2/5, RM3/3, RM4/4	2
R3	RM3/5, RM4/4, RM1/2	2
R4	RM4/4, RM2/3, RM3/3, RM1/4	3
R5	RM1/4, RM3/5	2

Merenjem u sistemu je određeno da je prosečno vreme transporta i čekanja 6h po svakom radnom mestu. Vreme trajanja efektivnog radnog dana je 12 h. Vremenski raspored opterećenja kapaciteta radnih mesta radnim nalogima odrediti metodom unapred.

### Rešenje:

Prvo se vrši konstrukcija vremenske slike stanja za svaki radni nalog – slika 4.6. Za proračun opterećenja se usvaja efektivni radni dan u trajanju od 12 sati. Konstrukcija vremenske slike stanja se izvodi na sledeći način:

- Radni nalog R1 – 3h na radnom mestu RM1 – 6h čekanje i transport – 4h na radnom mestu RM2 – 6h čekanje i transport – 3h na radnom mestu RM3 – 6h čekanje i transport – 3h na radnom mestu RM4.
- Radni nalog R2 – 5h na radnom mestu RM2 – 6h čekanje i transport – 3h na radnom mestu RM3 – 6h čekanje i transport – 4h na radnom mestu RM4.
- Radni nalog R3 – 5h na radnom mestu RM3 – 6h čekanje i transport – 4h na radnom mestu RM4 – 6h čekanje i transport – 2h na radnom mestu RM1.
- Radni nalog R4 – 4h na radnom mestu RM4 – 6h čekanje i transport – 3h na radnom mestu RM2 – 6h čekanje i transport – 3h na radnom mestu RM3 – 6h čekanje i transport – 4h na radnom mestu RM1.
- Radni nalog R5 – 4h na radnom mestu RM1 – 6h čekanje i transport – 5h na radnom mestu RM3.



**Slika 4.6.** Grafik vremenskih slika stanja radnih naloga. a) vremenska slika stanja radnog naloga R1. b) vremenska slika stanja radnog naloga R2. c) vremenska slika stanja radnog naloga R3. d) vremenska slika stanja radnog naloga R4. e) vremenska slika stanja radnog naloga R5.

U drugom koraku se vrši izrada dijagrama opterećenja radnih mesta (RM1, RM2, RM3 i RM4) na osnovu proračunatih vremenskih slika stanja – slika 4.7.

Izrada dijagrama za svako radno mesto se izvodi na sledeći način:

– Radni nalog R1:

Unosi se radni nalog R1 na radno mesto RM1 u vremenu od 3h u I radnom danu.

Unosi se radni nalog R1 na radno mesto RM2 u vremenu od 3h u I radnom danu.

Unosi se radni nalog R1 na radno mesto RM2 u vremenu od 1h u II radnom danu.

Unosi se radni nalog R1 na radno mesto RM3 u vremenu od 3h u II radnom danu.

Unosi se radni nalog R1 na radno mesto RM4 u vremenu od 3h u III radnom danu.

– Radni nalog R2:

Unosi se radni nalog R2 na radno mesto RM2 u vremenu od 5h u I radnom danu.

Unosi se radni nalog R2 na radno mesto RM3 u vremenu od 1h u I radnom danu.

Unosi se radni nalog R2 na radno mesto RM3 u vremenu od 2h u II radnom danu.

Unosi se radni nalog R2 na radno mesto RM4 u vremenu od 4h u II radnom danu.

– Radni nalog R3:

Unosi se radni nalog R3 na radno mesto RM3 u vremenu od 5h u I radnom danu.

Unosi se radni nalog R3 na radno mesto RM4 u vremenu od 1h u I radnom danu.

Unosi se radni nalog R3 na radno mesto RM4 u vremenu od 1h u I radnom danu.

Unosi se radni nalog R3 na radno mesto RM1 u vremenu od 2h u II radnom danu.

– Radni nalog R4:

Unosi se radni nalog R4 na radno mesto RM4 u vremenu od 4h u I radnom danu.

Unosi se radni nalog R4 na radno mesto RM2 u vremenu od 2h u I radnom danu.

Unosi se radni nalog R4 na radno mesto RM2 u vremenu od 1h u II radnom danu.

Unosi se radni nalog R4 na radno mesto RM3 u vremenu od 3h u II radnom danu.

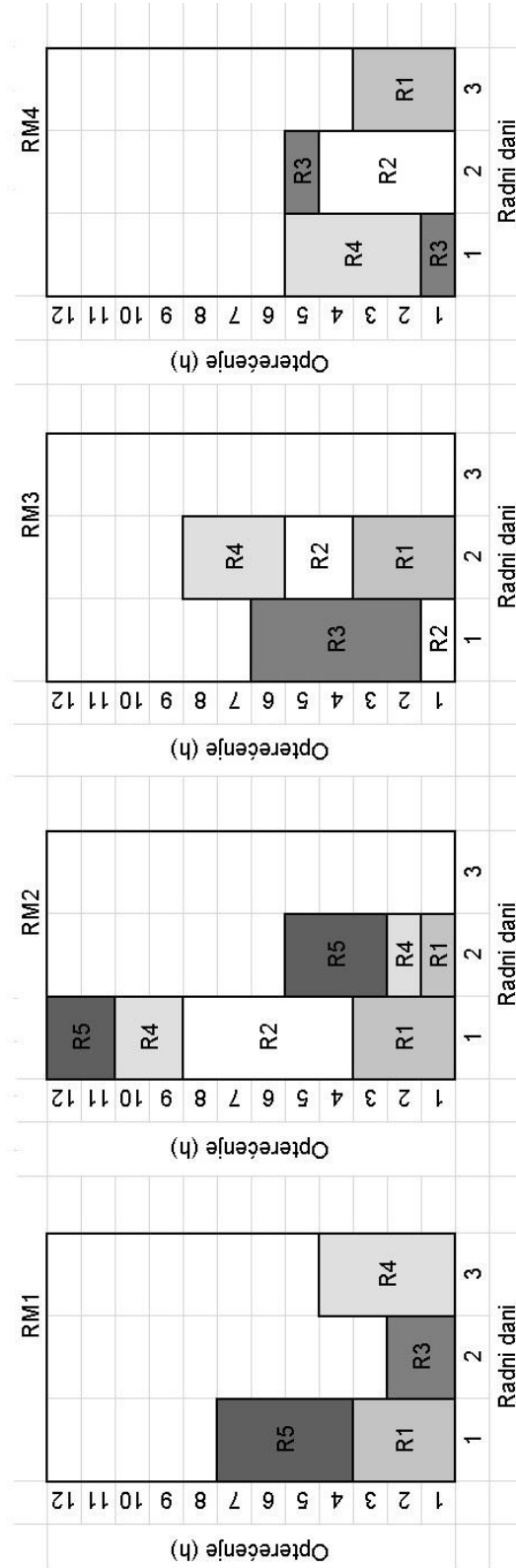
Unosi se radni nalog R4 na radno mesto RM1 u vremenu od 4h u III radnom danu.

– Radni nalog R5:

Unosi se radni nalog R5 na radno mesto RM1 u vremenu od 4h u I radnom danu.

Unosi se radni nalog R5 na radno mesto RM2 u vremenu od 2h u I radnom danu.

Unosi se radni nalog R5 na radno mesto RM2 u vremenu od 3h u II radnom danu.



Slika 4.7. Dijagram opterećenja radnih mesta radnim nalogima

Na osnovu slike 4.6. opterećenje radnih mesta radnim nalogima je sledeće:

– Radno mesto RM1:

I radnog dana opterećenje iznosi 7h, II dana 2h i III dana 4h.

– Radno mesto RM2:

I radnog dana opterećenje iznosi 12h, II dana 5h, a III dana nema opterećenja.

– Radno mesto RM3:

I radnog dana opterećenje iznosi 6h, II dana 8h, a III dana nema opterećenja.

– Radno mesto RM4:

I i II radnog dana opterećenje iznosi po 5h, a III dana 3h.

Nema preopterećenja radnih mesta (opterećenje iznad 12h po danu), tako da nema potrebe za uravnoteženjem.

**Zadatak 4.4.** U jednom preduzeću se na pet radna mesta koja imaju identične tehnološke sisteme (RM1, RM2, RM3, RM4 i RM5) izrađuju pet radna naloga (R1, R2, R3, R4 i R5), koje treba vremenski raspodeliti na data radna mesta. Vremena potrebna za izradu svakog radnog naloga na svakom radnom mestu su data u tabeli 4.4.

**Tabela 4.4.** Vremena potrebna za izradu svakog radnog naloga na svakom radnom mestu

Radni nalog	Radno mesto / vreme trajanja operacija (h)	Rok završetka (dan)
R1	RM3/5, RM5/1, RM4/4, RM2/3	4
R2	RM3/3, RM1/5, RM2/2	3
R3	RM4/5, RM5/2, RM1/4	3
R4	RM3/4, RM5/2, RM4/4	3
R5	RM3/2, RM1/2, RM2/4, RM5/4, RM4/1	5

Merenjem u sistemu je određeno da je prosečno vreme transporta i čekanja 5h po svakom radnom mestu. Vreme trajanja efektivnog radnog dana je 7 h. Vremenski raspored opterećenja kapaciteta radnih mesta radnim nalogima odrediti metodom unapred. Izvršiti uravnoteženje opterećenja radnih mesta heurističkom metodom, ukoliko je to neophodno, odnosno ako postoji preopterećenje radnih mesta radnim nalogima.



**Rešenje:**

Najpre se vrši konstrukcija vremenske slike stanja za svaki radni nalog. Na slici 4.8. su prikazani grafici sa vremenskim skalama radnih naloga. Za proračun opterećenja se usvaja efektivni radni dan u trajanju od 7 sati. Konstrukcija vremenske slike stanja se vrši na sledeći način:

- Radni nalog R1 – 5h na radnom mestu RM3 – 5h čekanje i transport – 1h na radnom mestu RM5 – 5h čekanje i transport – 4h na radnom mestu RM4 – 5h čekanje i transport – 3h na radnom mestu RM2.
- Radni nalog R2 – 3h na radnom mestu RM3 – 5h čekanje i transport – 5h na radnom mestu RM1 – 5h čekanje i transport – 2h na radnom mestu RM2.
- Radni nalog R3 – 5h na radnom mestu RM4 – 5h čekanje i transport – 2h na radnom mestu RM5 – 5h čekanje i transport – 4h na radnom mestu RM1.
- Radni nalog R4 – 4h na radnom mestu RM3 – 5h čekanje i transport – 2h na radnom mestu RM5 – 5h čekanje i transport – 4h na radnom mestu RM4.
- Radni nalog R5 – 2h na radnom mestu RM3 – 5h čekanje i transport – 2h na radnom mestu RM1 – 5h čekanje i transport – 4h na radnom mestu RM2 – 5h čekanje i transport – 4h na radnom mestu RM5 – 5h čekanje i transport – 1h na radnom mestu RM4.

U drugom koraku se vrši izrada dijagrama opterećenja radnih mesta (RM1, RM2, RM3, RM4 i RM5) na osnovu proračunatih vremenskih slika stanja – slika 4.9.

Izrada dijagrama za svako radno mesto se izvodi na sledeći način:

- Radni nalog R1:

Unosi se radni nalog R1 na radno mesto RM3 u vremenu od 5h u I radnom danu.

Unosi se radni nalog R1 na radno mesto RM5 u vremenu od 1h u II radnom danu.

Unosi se radni nalog R1 na radno mesto RM4 u vremenu od 4h u III radnom danu.

Unosi se radni nalog R1 na radno mesto RM2 u vremenu od 2h u IV radnom danu.

- Radni nalog R2:

Unosi se radni nalog R2 na radno mesto RM3 u vremenu od 3h u I radnom danu.

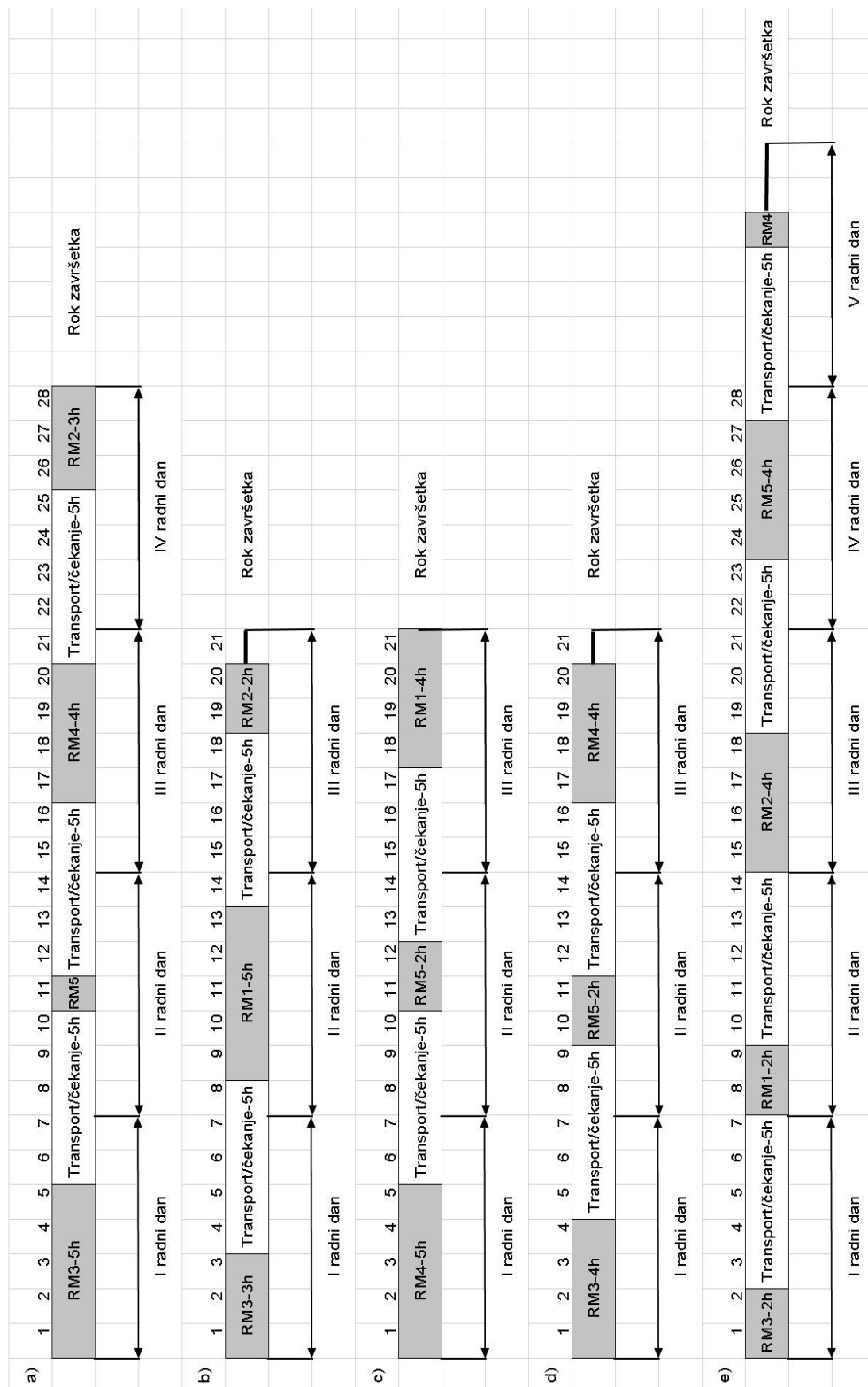
Unosi se radni nalog R2 na radno mesto RM1 u vremenu od 5h u II radnom danu.

Unosi se radni nalog R2 na radno mesto RM2 u vremenu od 2h u III radnom danu.

- Radni nalog R3:

Unosi se radni nalog R3 na radno mesto RM4 u vremenu od 5h u I radnom danu.

Unosi se radni nalog R3 na radno mesto RM5 u vremenu od 2h u II radnom danu.



Slika 4.8. Grafik vremenskih slika stanja radnih naloga. a) vremenska slika stanja radnog naloga R.1. b) vremenska slika stanja radnog naloga R.2. c) vremenska slika stanja radnog naloga R.3. d) vremenska slika stanja radnog naloga R.4. e) vremenska slika stanja radnog naloga R.5.

Unosi se radni nalog R3 na radno mesto RM1 u vremenu od 4h u III radnom danu.

– Radni nalog R4:

Unosi se radni nalog R4 na radno mesto RM3 u vremenu od 4h u I radnom danu.

Unosi se radni nalog R4 na radno mesto RM5 u vremenu od 2h u II radnom danu.

Unosi se radni nalog R4 na radno mesto RM4 u vremenu od 4h u III radnom danu.

– Radni nalog R5:

Unosi se radni nalog R5 na radno mesto RM3 u vremenu od 2h u I radnom danu.

Unosi se radni nalog R5 na radno mesto RM1 u vremenu od 2h u II radnom danu.

Unosi se radni nalog R5 na radno mesto RM2 u vremenu od 4h u III radnom danu.

Unosi se radni nalog R5 na radno mesto RM5 u vremenu od 4h u IV radnom danu.

Unosi se radni nalog R5 na radno mesto RM4 u vremenu od 1h u V radnom danu.

Na osnovu slike 4.9. opterećenje radnih mesta radnim nalogima je sledeće:

– Radno mesto RM1:

I, IV i V radnog dana nema opterećenja. II radnog dana opterećenje iznosi 7h, a III 4h.

– Radno mesto RM2:

I, II i V radnog dana nema opterećenja. III dana opterećenje iznosi 6h, a IV dana 2h.

– Radno mesto RM3:

I radnog dana opterećenje iznosi 14h, a ostalih dana nema opterećenja.

– Radno mesto RM4:

I radnog dana opterećenje iznosi 5h, II dana 0h, III dana 8h, IV dana 0h i V dana 1h.

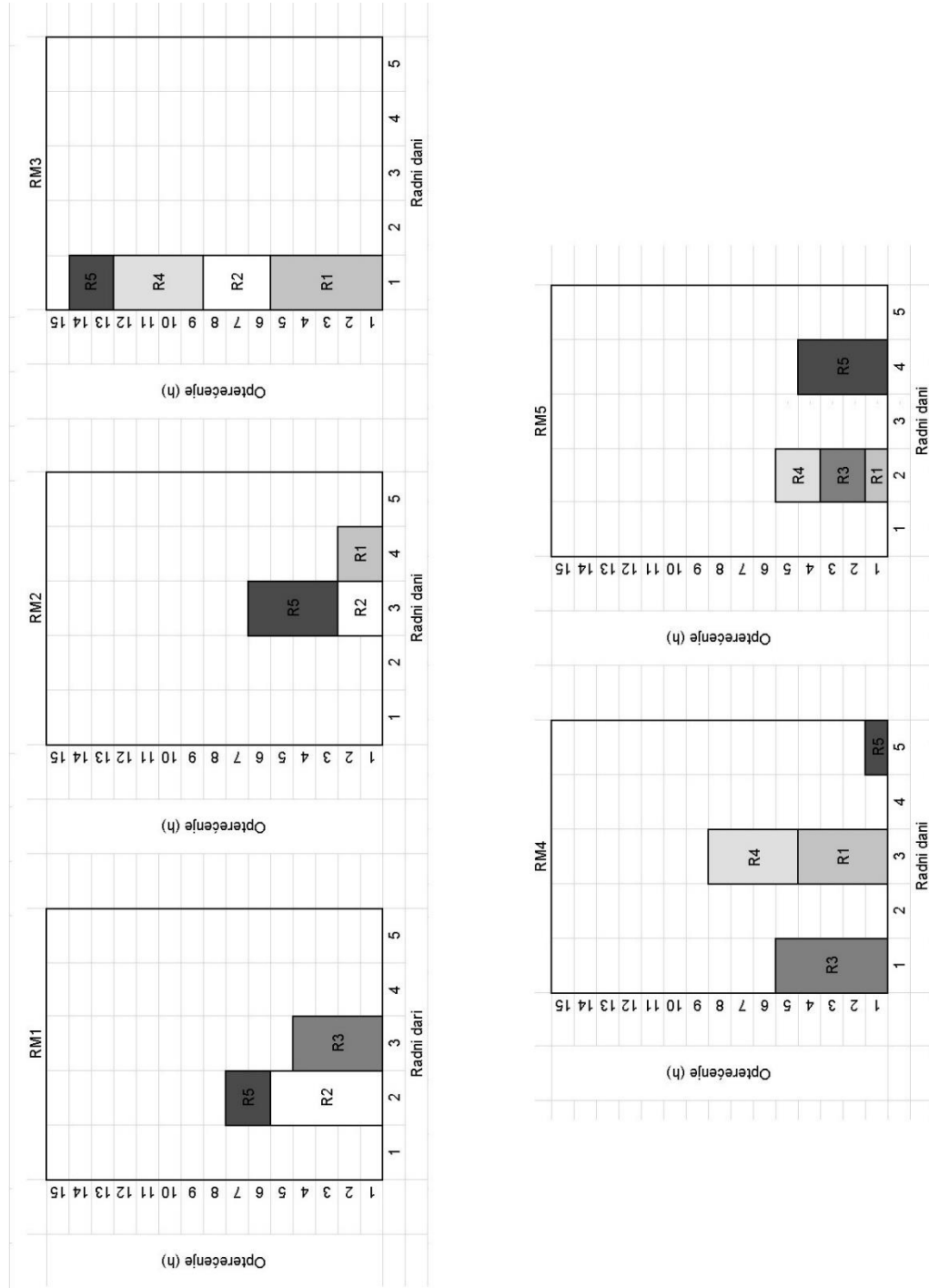
– Radno mesto RM5:

I radnog dana nema opterećenja. II dana opterećenje je 5h, III dana 0h, IV dana 4h i V dana nema opterećenja.

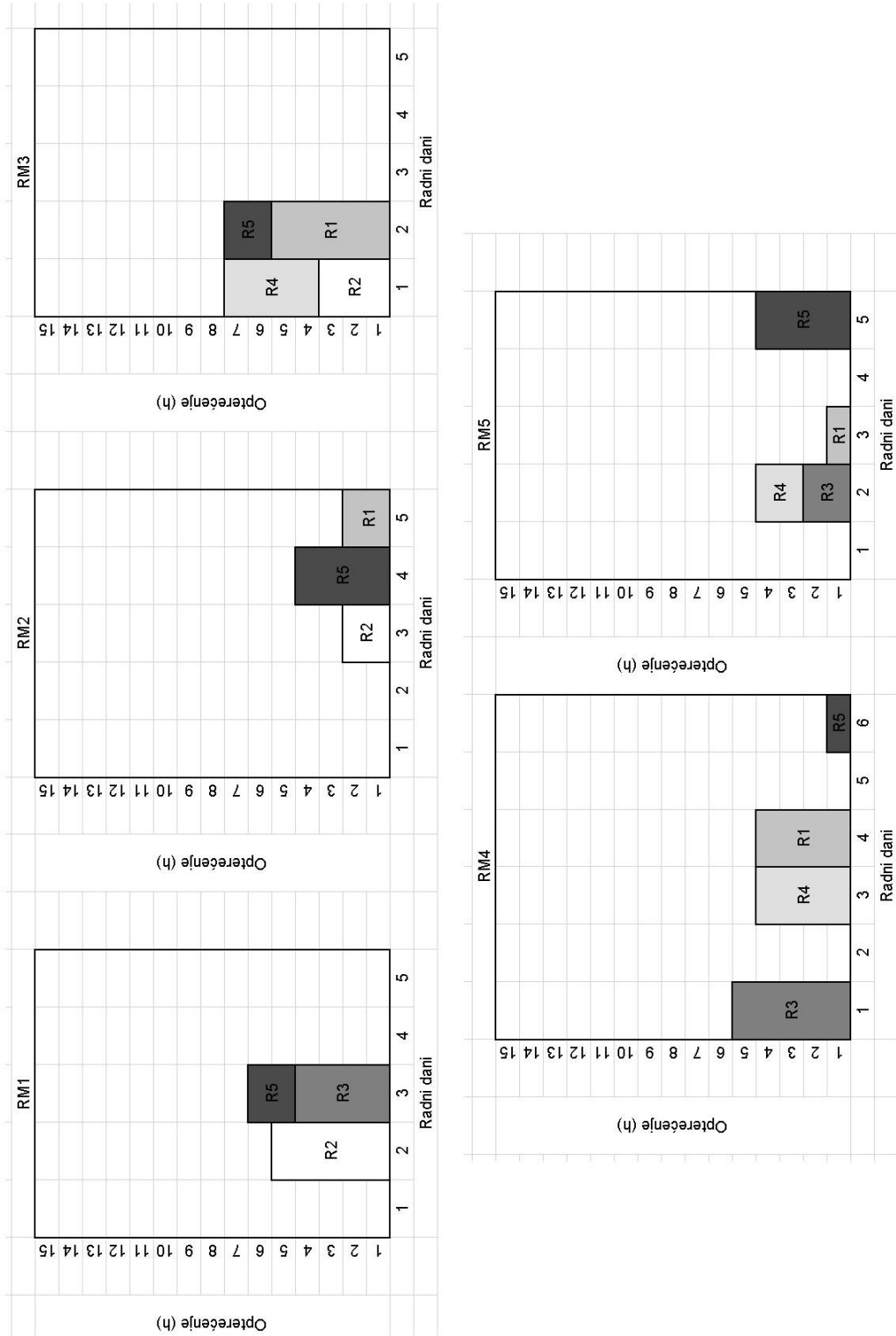
Na osnovu slike 4.9. vidi se da se dva dana javlja preopterećenje (opterećenje iznad 7h po danu) i to na radnim mestima RM3 (I dana – 14h) i RM4 (III dana – 8h).

Rešenje preopterećenja može se postići pomeranjem početaka određenih radnih naloga na II radni dan, pri čemu će dati radni nalozi kasniti 1 dan. Ukoliko potrošači prihvataju dato kašnjenje, opterećenje kapaciteta radnih mesta može biti uravnoteženo.

Kao što se vidi sa slike 4.9., za pomeranje ulaza za jedan dan se mogu razmatrati radni nalozi R1, R2, R4 i R5 jer oni dovode do preopterećenja. Početak radnog naloga R1 se može pomeriti za jedan dan, čime se rešava preopterećenje na radnom mestu RM4, ali za rešavanje preopterećenja na radnom mestu RM3 neophodno je pomeriti još jedan radni nalog.



SIKA 4.9. Dijagram opterećenja radnih mesta radnim nalogima



Slika 4.10. Dijagram opterećenja radnih mesta radnim nalogima, nakon uravnoteženja

Ako se pomera radni nalog R2, rešiće se preopterećenje na radnom mestu RM3, ali će to dovesti do novog preopterećenja na radnom mestu RM1 – III dana, jer će se u tom slučaju R2 „nastaviti“ na radni nalog R3.

Ako se pomeri radni nalog R4, opet će se javiti preopterećenje na radnom mestu RM4, samo sada IV radnog dana. Ostaje još radni nalog R5. Njegovim pomeranjem će se rešiti problem preopterećenja, ali uz njegovo kašnjenje od 1 radnog dana (kao i radnog naloga R1) – slika 4.10.

**Zadatak 4.5.** U jednom preduzeću se na četiri radna mesta koja imaju identične tehnološke sisteme (RM1, RM2, RM3 i RM4) izrađuju četiri radna naloga (R1, R2, R3 i R4), koje treba vremenski raspodeliti na data radna mesta. Vremena potrebna za izradu svakog radnog naloga na svakom radnom mestu su data u tabeli 4.5.

**Tabela 4.5.** Vremena potrebna za izradu svakog radnog naloga na svakom radnom mestu

Radni nalog	Radno mesto / vreme trajanja operacija (h)	Rok završetka (dan)
R1	RM2/3, RM4/2, RM1/4, RM3/3	3
R2	RM4/4, RM3/2, RM1/3, RM2/3	3
R3	RM1/2, RM2/3, RM3/3, RM4/4	3
R4	RM3/4, RM1/2, RM4/4, RM2/3	4

Merenjem u sistemu je određeno da je prosečno vreme transporta i čekanja 3h po svakom radnom mestu. Vreme trajanja efektivnog radnog dana je 7 h. Vremenski raspored opterećenja kapaciteta radnih mesta radnim nalozima odrediti metodom unapred. Izvršiti uravnoteženje opterećenja radnih mesta heurističkom metodom, ukoliko je to neophodno, odnosno ako postoji preopterećenje radnih mesta radnim nalozima.

### Rešenje:

Prvo treba konstruisati vremenske slike stanja za svaki radni nalog. Za proračun opterećenja se usvaja efektivni radni dan u trajanju od 7 sati. Konstrukcija vremenske slike stanja se vrši na sledeći način:

- Radni nalog R1 – 3h na radnom mestu RM2 – 3h čekanje i transport – 2h na radnom mestu RM4 – 3h čekanje i transport – 4h na radnom mestu RM1 – 3h čekanje i transport – 3h na radnom mestu RM3.

- Radni nalog R2 – 4h na radnom mestu RM4 – 3h čekanje i transport – 2h na radnom mestu RM3 – 3h čekanje i transport – 3h na radnom mestu RM1 – 3h čekanje i transport – 3h na radnom mestu RM2.
- Radni nalog R3 – 2h na radnom mestu RM1 – 3h čekanje i transport – 3h na radnom mestu RM2 – 3h čekanje i transport – 3h na radnom mestu RM3 – 3h čekanje i transport – 4h na radnom mestu RM4.
- Radni nalog R4 – 4h na radnom mestu RM3 – 3h čekanje i transport – 2h na radnom mestu RM1 – 3h čekanje i transport – 4h na radnom mestu RM4 – 3h čekanje i transport – 3h na radnom mestu RM2.

Na slici 4.11. su prikazani grafici sa vremenskim skalama radnih naloga.

U drugom koraku se vrši izrada dijagrama opterećenja radnih mesta (RM1, RM2, RM3 i RM4) na osnovu proračunatih vremenskih slika stanja – slika 4.12.

Izrada dijagrama za svako radno mesto se izvodi na sledeći način:

- Radni nalog R1:

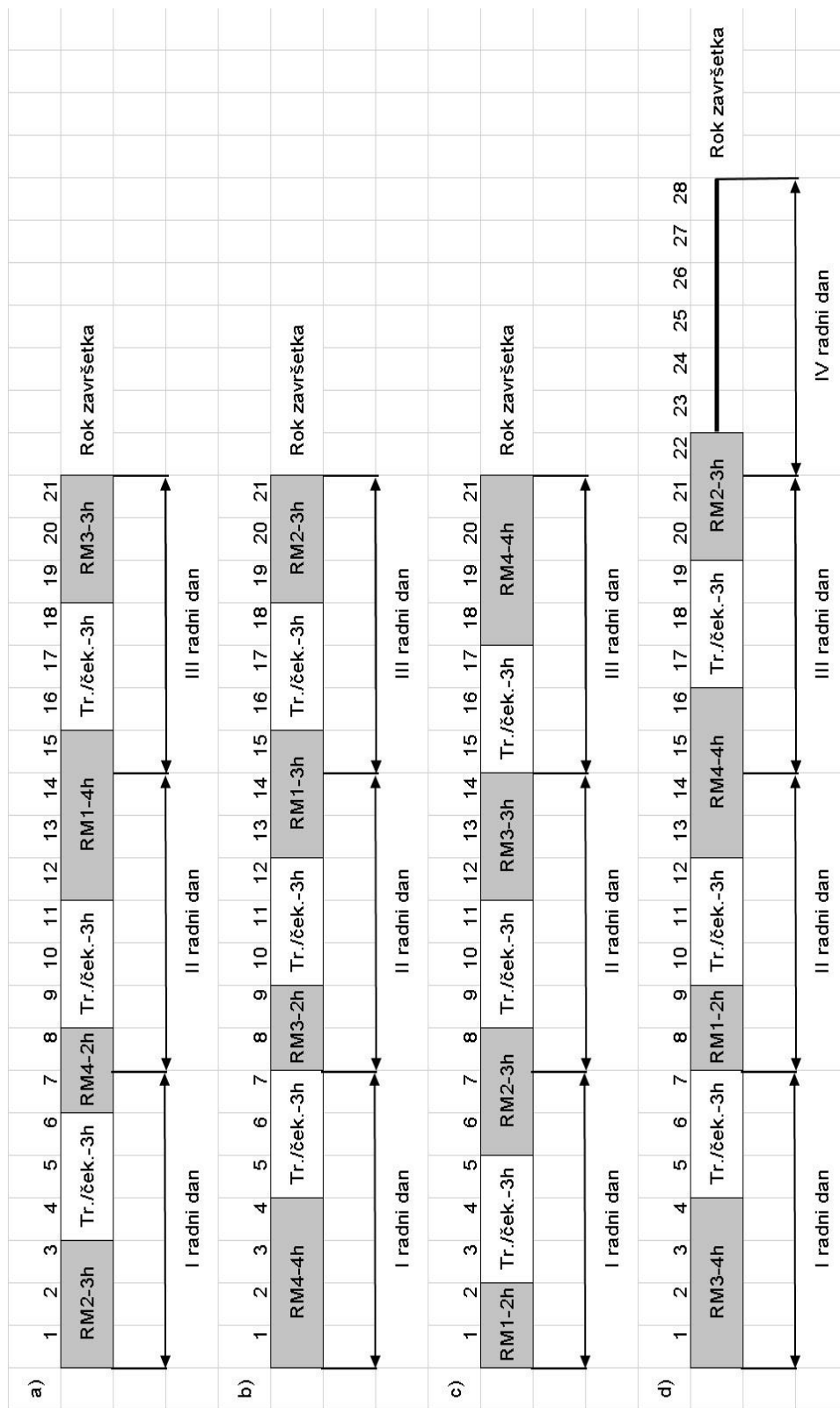
Unosi se radni nalog R1 na radno mesto RM2 u vremenu od 3h u I radnom danu.  
Unosi se radni nalog R1 na radno mesto RM4 u vremenu od 1h u I radnom danu.  
Unosi se radni nalog R1 na radno mesto RM4 u vremenu od 1h u II radnom danu.  
Unosi se radni nalog R1 na radno mesto RM1 u vremenu od 3h u II radnom danu.  
Unosi se radni nalog R1 na radno mesto RM1 u vremenu od 1h u III radnom danu.  
Unosi se radni nalog R1 na radno mesto RM3 u vremenu od 3h u III radnom danu.

- Radni nalog R2:

Unosi se radni nalog R2 na radno mesto RM4 u vremenu od 4h u I radnom danu.  
Unosi se radni nalog R2 na radno mesto RM3 u vremenu od 2h u II radnom danu.  
Unosi se radni nalog R2 na radno mesto RM1 u vremenu od 2h u II radnom danu.  
Unosi se radni nalog R2 na radno mesto RM1 u vremenu od 1h u III radnom danu.  
Unosi se radni nalog R2 na radno mesto RM2 u vremenu od 3h u III radnom danu.

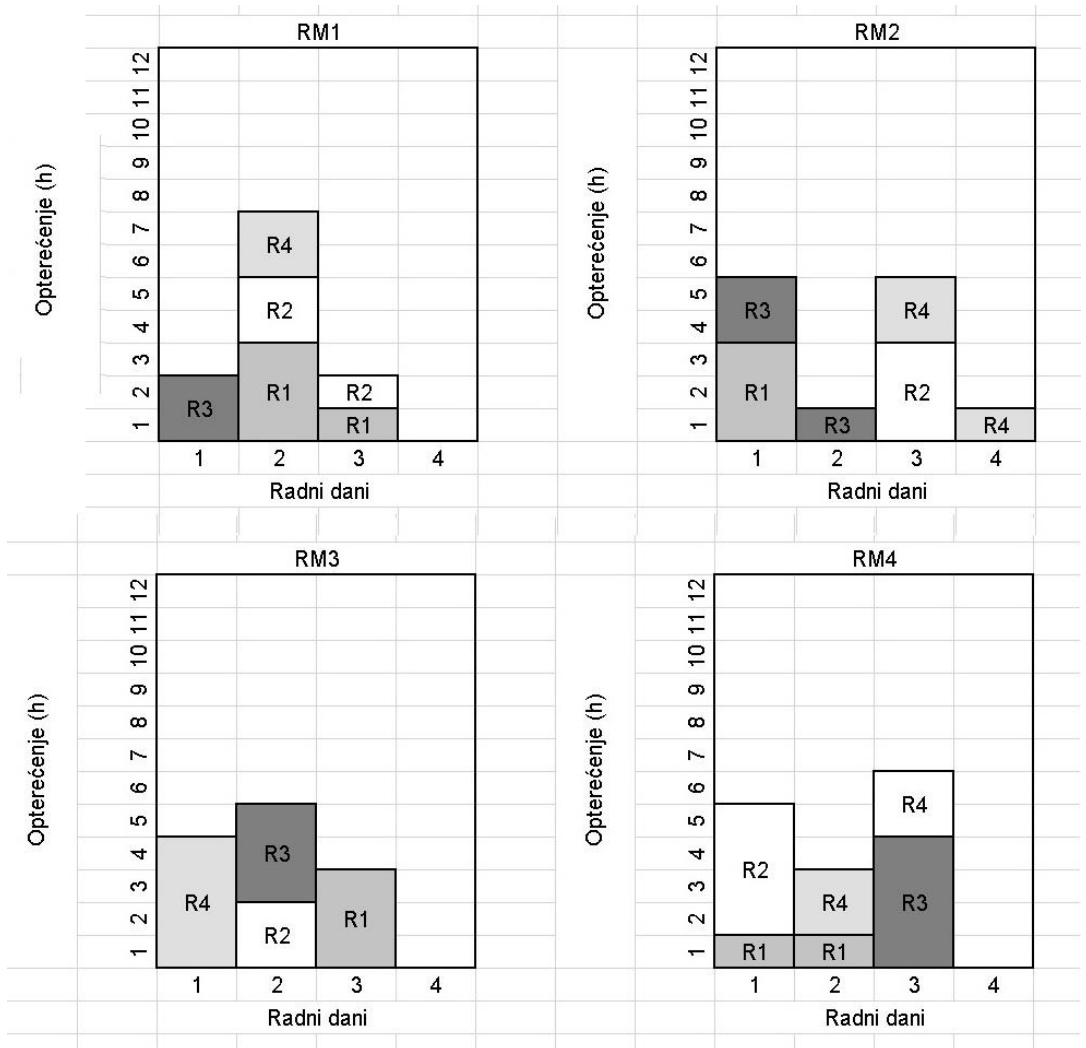
- Radni nalog R3:

Unosi se radni nalog R3 na radno mesto RM1 u vremenu od 2h u I radnom danu.  
Unosi se radni nalog R3 na radno mesto RM2 u vremenu od 2h u I radnom danu.  
Unosi se radni nalog R3 na radno mesto RM2 u vremenu od 1h u II radnom danu.  
Unosi se radni nalog R3 na radno mesto RM3 u vremenu od 3h u II radnom danu.  
Unosi se radni nalog R3 na radno mesto RM4 u vremenu od 4h u III radnom danu.



**Slika 4.11.** Grafik vremenskih slika stanja radnih naloga. a) vremenska slika stanja radnog naloga R.1. b) vremenska slika stanja radnog naloga R.2. c) vremenska slika stanja radnog naloga R.3. d) vremenska slika stanja radnog naloga R.4.





Slika 4.12. Dijagram opterećenja radnih mesta radnim nalogima

– Radni nalog R4:

Unosi se radni nalog R4 na radno mesto RM3 u vremenu od 4h u I radnom danu.  
 Unosi se radni nalog R4 na radno mesto RM1 u vremenu od 2h u II radnom danu.  
 Unosi se radni nalog R4 na radno mesto RM4 u vremenu od 2h u II radnom danu.  
 Unosi se radni nalog R4 na radno mesto RM4 u vremenu od 2h u III radnom danu.  
 Unosi se radni nalog R4 na radno mesto RM2 u vremenu od 2h u III radnom danu.  
 Unosi se radni nalog R4 na radno mesto RM2 u vremenu od 1h u IV radnom danu.

Na osnovu slike 4.12. opterećenje radnih mesta radnim nalogima je sledeće:

– Radno mesto RM1:

I radnog dana opterećenje je 2h, II radnog dana 7h, III dana 2h, a IV radnog dana nema opterećenja.

– Radno mesto RM2:

I i III radnog dana opterećenje iznosi po 5h, a II i IV dana po 1h.

– Radno mesto RM3:

I radnog dana opterećenje iznosi 4h, II dana 5h, III dana 3h a IV radnog dana nema opterećenja.

– Radno mesto RM4:

I radnog dana opterećenje iznosi 5h, II dana 3h, III dana 6h, a IV dana 0h.

Na osnovu slike 4.12. vidi se da se ne javlja preopterećenje (opterećenje iznad 7h po danu).

### 4.3. OPTEREĆENJE RADNIH MESTA RADNIM NALOZIMA METODOM UNAZAD

**Zadatak 4.6.** U jednom proizvodnom pogonu na tri radna mesta sa po jednim tehnološkim sistemom (RM1, RM2, RM3) se izrađuje četiri radnih naloga (R1, R2, R3, R4), koje treba vremenski raspodeliti na data radna mesta. Vremena potrebna za izradu svakog radnog naloga na svakom radnom mestu su data u tabeli 4.6.

**Tabela 4.6.** Vremena potrebna za izradu svakog radnog naloga na svakom radnom mestu

Radni nalog	Radno mesto / vreme trajanja operacija (h)	Rok završetka (dan)
R1	RM1/3, RM2/4, RM3/5	4
R2	RM2/4, RM3/3, RM1/2	4
R3	RM3/5, RM1/4	3
R4	RM3/3, RM2/4, RM1/3	4

Pretpostavka je da su raspoloživa vremena rada tehnoloških sistema jedina ograničavajuća veličina. Veći deo vremena radni nalozi provode u transportu i čekanju na izvršenje operacija obrade. Prosečno vreme transporta i čekanja je 8 h po svakom radnom mestu. Vreme trajanja efektivnog radnog dana je 8 h. Vremenski raspored opterećenja kapaciteta radnih mesta radnim nalogima odrediti metodom unazad (ovo je isti zadatak kao i zadatak 4.1., samo ovde se umesto metode unapred koristi metoda unazad).

#### Rešenje:

Prvi korak je konstrukcija vremenske slike stanja za svaki radni nalog – slika 4.13. Za proračun opterećenja se usvaja efektivni radni dan u trajanju od 8 sati.

Početak vremenske slike stanja je od postavljenih rokova završetaka za svaki radni nalog, a opterećenje se vrši unazad u vremenu. Konstrukcija vremenske slike stanja se izvodi na sledeći način: za radni nalog R1 prvo se unosi poslednja operacija, a to je 5 sata na radnom mestu RM3 i to od kraja IV radnog dana unazad. Potom se unosi unazad vreme koje on provede na čekanju i transport (8h). Zatim se unosi vreme obrade ovog radnog naloga na radnom mestu RM2 (4 sata). Nakon toga opet se nanosi vreme od 8 sati u čekanju i transportu, Na kraju, unosi se vreme obrade na radnom mestu RM1 – 3h. Na isti način se analiziraju ostali radni nalozi, odnosno:

- Radni nalog R2 – 2h na radnom mestu RM1 IV radnog dana – 8h čekanje i transport unazad – 3h na radnom mestu RM3 – 8h čekanje i transport – 4h na radnom mestu RM2 (sve unazad).
- Radni nalog R3 – 4h na radnom mestu RM1 III radnog dana – 8h čekanje i transport – 5h na radnom mestu RM3 (sve unazad).
- Radni nalog R4 – 3h na radnom mestu RM1 IV radnog dana – 8h čekanje i transport – 4h na radnom mestu RM2 – 8h čekanje i transport – 3h na radnom mestu RM3 (sve unazad).

U drugom koraku se vrši izrada dijagrama opterećenja radnih mesta (RM1, RM2 i RM3) na osnovu proračunatih vremenskih slika stanja – slika 4.14.

Izrada dijagrama za svako radno mesto se izvodi na sledeći način: unosi se radni nalog R1 na radno mesto RM3 u vremenu od 5 sata u IV radnom danu, 3 sata na radnom mestu RM2 u III radnom danu i 1 sat na istom radnom mestu u II radnom danu i 3 sata na radnom mestu RM1 u I radnom danu. Postupak se nastavlja sa ostalim radnim nalogima i to:

- Radni nalog R2:

Unosi se radni nalog R2 na radno mesto RM1 u vremenu od 2h u IV radnom danu.

Unosi se radni nalog R2 na radno mesto RM3 u vremenu od 3h u III radnom danu.

Unosi se radni nalog R2 na radno mesto RM2 u vremenu od 3h u II radnom danu.

Unosi se radni nalog R2 na radno mesto RM2 u vremenu od 1h u I radnom danu.

- Radni nalog R3:

Unosi se radni nalog R3 na radno mesto RM1 u vremenu od 4h u III radnom danu.

Unosi se radni nalog R3 na radno mesto RM3 u vremenu od 4h u II radnom danu.

Unosi se radni nalog R3 na radno mesto RM3 u vremenu od 1h u I radnom danu.

- Radni nalog R4:

Unosi se radni nalog R4 na radno mesto RM1 u vremenu od 3h u IV radnom danu.

Unosi se radni nalog R4 na radno mesto RM2 u vremenu od 4h u III radnom danu.

Unosi se radni nalog R4 na radno mesto RM3 u vremenu od 1h u II radnom danu.

Unosi se radni nalog R4 na radno mesto RM3 u vremenu od 2h u I radnom danu.

Na osnovu slike 4.14. opterećenje radnih mesta radnim nalogima je sledeće:

- Radno mesto RM1:

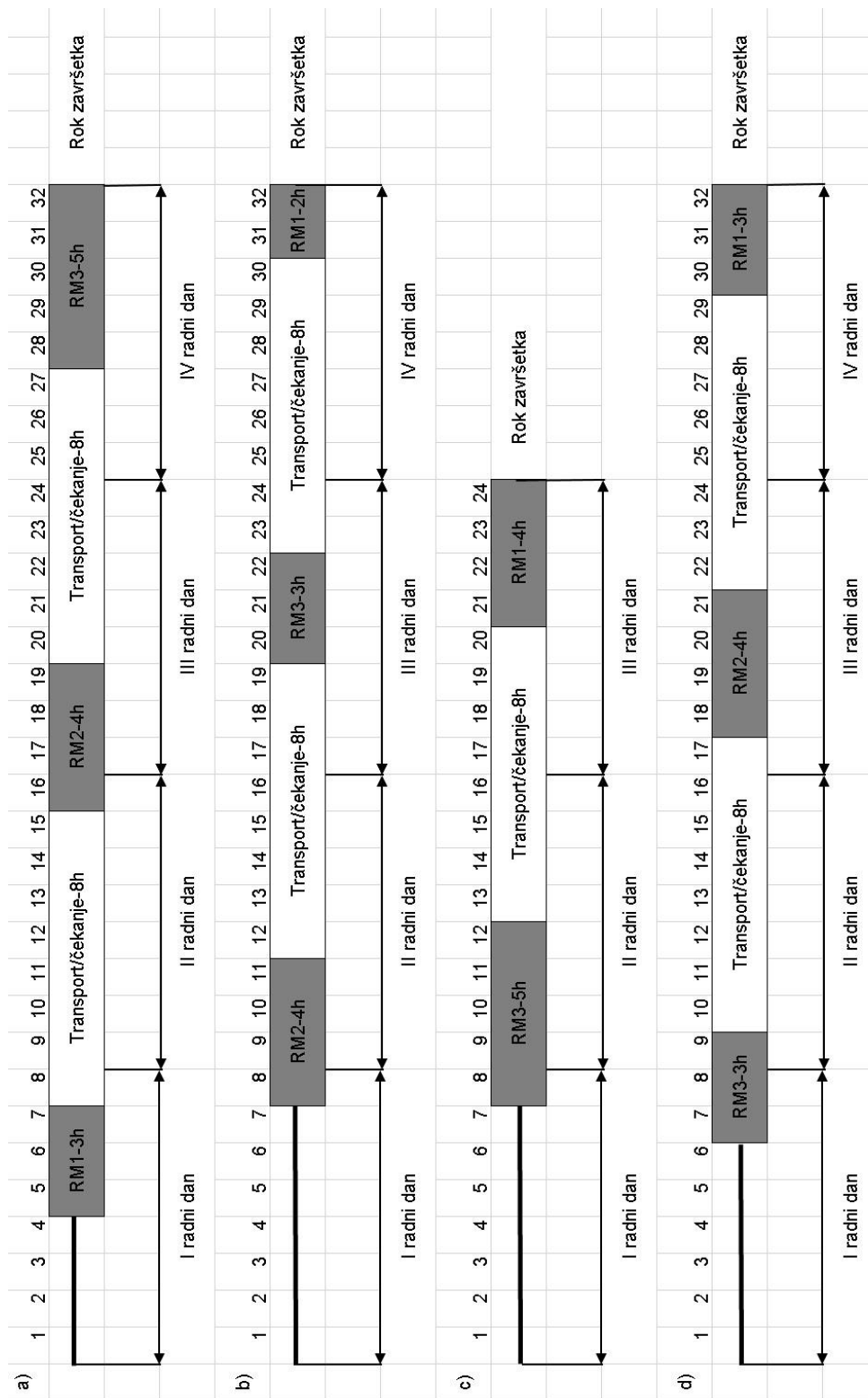
I radnog dana opterećenje iznosi 3h, II dana 0h, a III dana 4h i IV dana 5h.

- Radno mesto RM2:

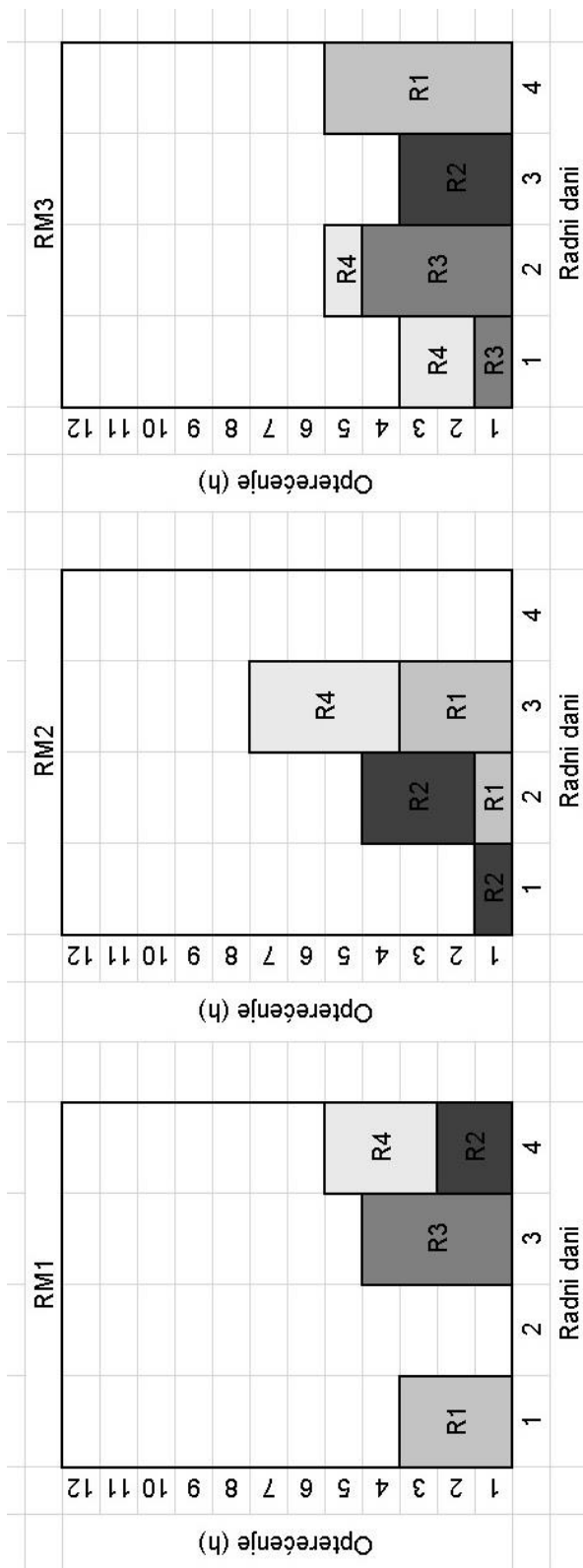
I radnog dana opterećenje iznosi 1h, II dana 4h, a III dana 7h i IV dana 0h.

- Radno mesto RM3:

I radnog dana opterećenje iznosi 3h, II dana 5h, III dana 3h i IV dana 5h.



Slika 4.13. Grafik vremenskih slika stanja radnih naloga. a) vremenska slika stanja radnog naloga R.1. b) vremenska slika stanja radnog naloga R.2. c) vremenska slika stanja radnog naloga R.3. d) vremenska slika stanja radnog naloga R.4.



Slika 4.14. Dijagram opterećenja radnih mesta radnim nalogima

Kao što se vidi sa slike 4.14., nema preopterećenja radnih mesta (opterećenje iznad 8h po danu).

**Zadatak 4.7.** Proizvodni pogon male kompanije raspolaže sa četiri radna mesta koje imaju identične tehnološke sisteme (RM1, RM2, RM3 i RM4), na kojima se izrađuju četiri proizvoda (radnih naloga R1, R2, R3, R4). Radne naloge je potrebno vremenski raspodeliti na data radna mesta. Vremena potrebna za izradu svakog radnog naloga na svakom radnom mestu su data u tabeli 4.7.

**Tabela 4.7.** Vremena potrebna za izradu svakog radnog naloga na svakom radnom mestu

Radni nalog	Radno mesto / vreme trajanja operacija (h)	Rok završetka (dan)
R1	RM2/4, RM3/3, RM4/2	2
R2	RM1/1, RM2/2, RM3/3, RM4/4	3
R3	RM1/5, RM3/5, RM4/3	3
R4	RM4/8, RM3/4, RM2/2, RM1/5	4

Merenjem u sistemu je određeno da je prosečno vreme transporta i čekanja 3h po svakom radnom mestu. Vreme trajanja efektivnog radnog dana je 8h. Vremenski raspored opterećenja kapaciteta radnih mesta radnim nalogima u posmatranoj kompaniji je potrebno odrediti metodom unazad. Izvršiti uravnoteženje opterećenja radnih mesta heurističkom metodom, ukoliko je to neophodno, odnosno ako postoji preopterećenje radnih mesta radnim nalogima.

### Rešenje:

Prvo se vrši konstrukcija vremenske slike stanja za svaki radni nalog – slika 4.15.

Pošto se primenjuje metoda unazad, početak vremenske slike stanja je od postavljenih rokova završetaka za svaki radni nalog. Konstrukcija vremenske slike stanja se izvodi na sledeći način:

- Radni nalog R1 – 2h na radnom mestu RM4 II radnog dana – 3h čekanje i transport – 3h na radnom mestu RM3 – 3h čekanje i transport – 4h na radnom mestu RM2 (sve unazad).
- Radni nalog R2 – 4h na radnom mestu RM4 III radnog dana – 3h čekanje i transport unazad – 3h na radnom mestu RM3 – 3h čekanje i transport – 2h na radnom mestu RM2 – 3h čekanje i transport – 1h na radnom mestu RM1 (sve unazad).

- Radni nalog R3 – 3h na radnom mestu RM4 III radnog dana – 3h čekanje i transport – 5h na radnom mestu RM3 – 3h čekanje i transport – 5h na radnom mestu RM1 (sve unazad).
- Radni nalog R4 – 5h na radnom mestu RM1 IV radnog dana – 3h čekanje i transport – 2h na radnom mestu RM2 – 3h čekanje i transport – 4h na radnom mestu RM3 – 3h čekanje i transport – 8h na radnom mestu RM4 (sve unazad).

Nakon prvog koraka se vrši izrada dijagrama opterećenja radnih mesta (RM1, RM2, RM3 i RM4) na osnovu proračunatih vremenskih slika stanja – slika 4.16.

Izrada dijagrama za svako radno mesto se izvodi na sledeći način:

- Radni nalog R1:

Unosi se radni nalog R1 na radno mesto RM4 u vremenu od 2h u II radnom danu.

Unosi se radni nalog R1 na radno mesto RM3 u vremenu od 3h u II radnom danu.

Unosi se radni nalog R1 na radno mesto RM2 u vremenu od 4h u I radnom danu.

- Radni nalog R2:

Unosi se radni nalog R2 na radno mesto RM4 u vremenu od 4h u III radnom danu.

Unosi se radni nalog R2 na radno mesto RM3 u vremenu od 1h u III radnom danu.

Unosi se radni nalog R2 na radno mesto RM3 u vremenu od 2h u II radnom danu.

Unosi se radni nalog R2 na radno mesto RM2 u vremenu od 2h u II radnom danu.

Unosi se radni nalog R2 na radno mesto RM1 u vremenu od 1h u I radnom danu.

- Radni nalog R3:

Unosi se radni nalog R3 na radno mesto RM4 u vremenu od 3h u III radnom danu.

Unosi se radni nalog R3 na radno mesto RM3 u vremenu od 2h u III radnom danu.

Unosi se radni nalog R3 na radno mesto RM3 u vremenu od 3h u II radnom danu.

Unosi se radni nalog R3 na radno mesto RM1 u vremenu od 2h u II radnom danu.

Unosi se radni nalog R3 na radno mesto RM1 u vremenu od 3h u I radnom danu.

- Radni nalog R4:

Unosi se radni nalog R4 na radno mesto RM1 u vremenu od 5h u IV radnom danu.

Unosi se radni nalog R4 na radno mesto RM2 u vremenu od 2h u III radnom danu.

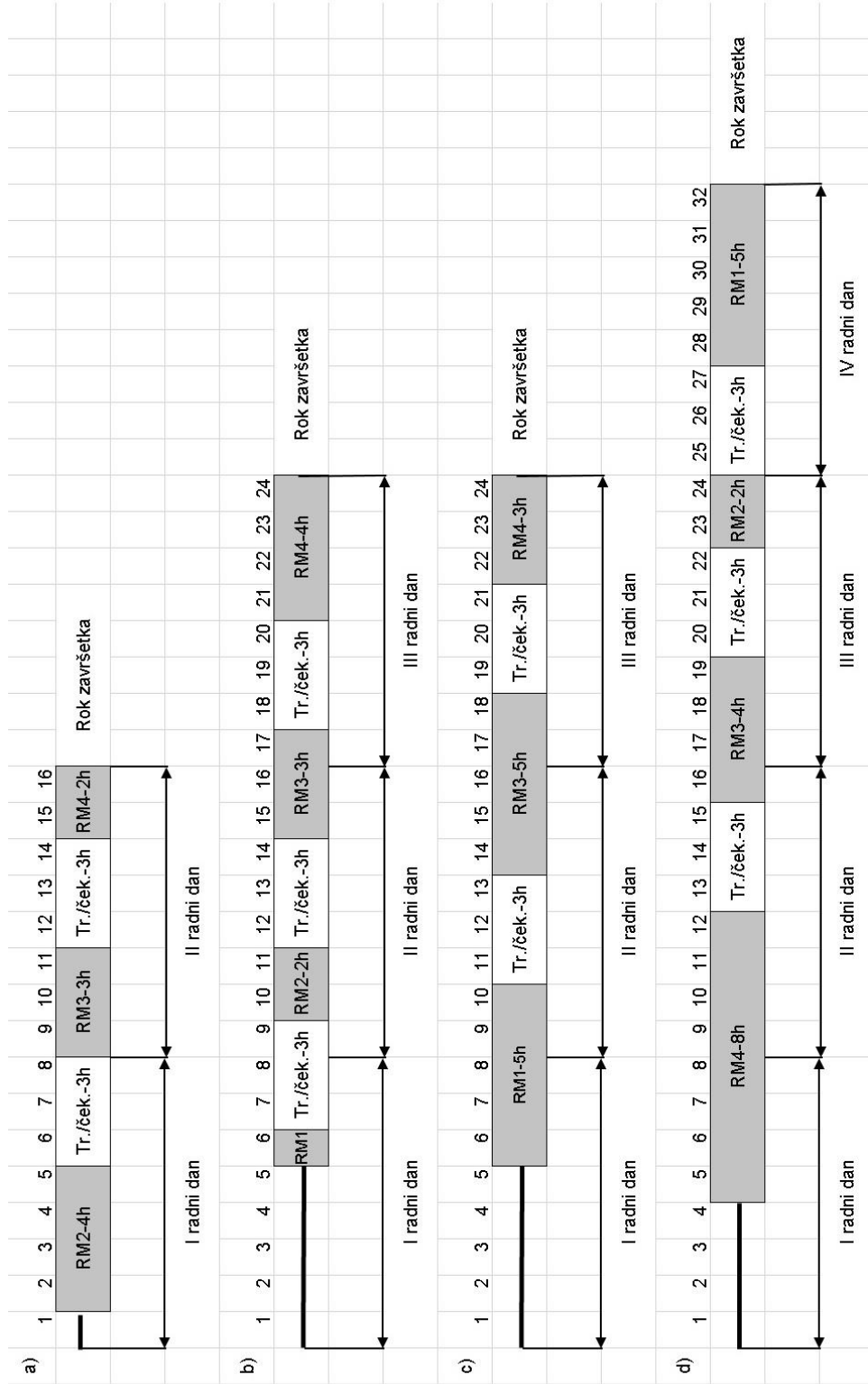
Unosi se radni nalog R4 na radno mesto RM3 u vremenu od 3h u III radnom danu.

Unosi se radni nalog R4 na radno mesto RM3 u vremenu od 1h u II radnom danu.

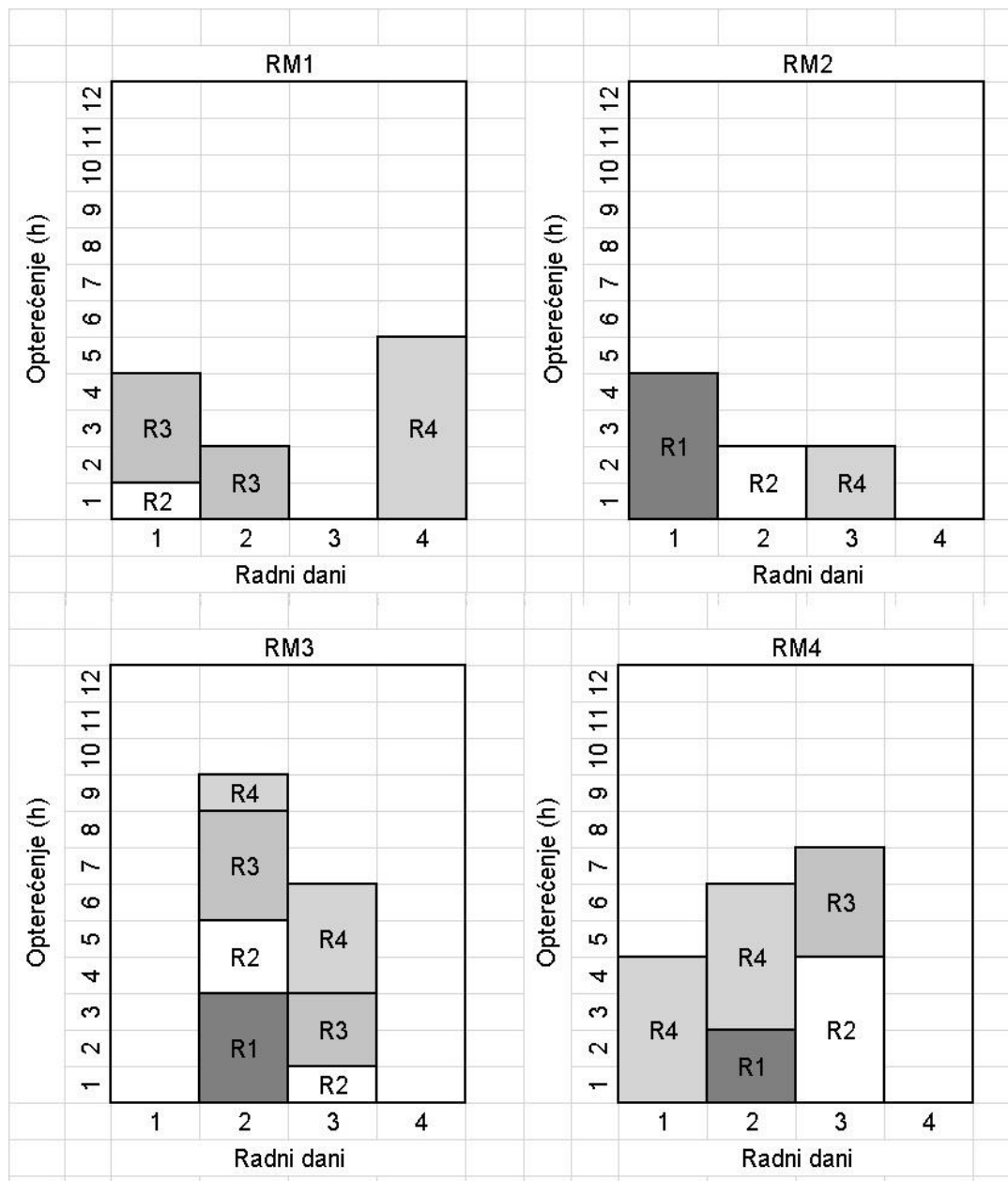
Unosi se radni nalog R4 na radno mesto RM4 u vremenu od 4h u II radnom danu.

Unosi se radni nalog R4 na radno mesto RM4 u vremenu od 4h u I radnom danu.





**Slika 4.15.** Grafik vremenskih slika stanja radnih naloga. a) vremenska slika stanja radnog naloga R.1. b) vremenska slika stanja radnog naloga R.2. c) vremenska slika stanja radnog naloga R.3. d) vremenska slika stanja radnog naloga R.4.



Slika 4.16. Dijagram opterećenja radnih mesta radnim nalogima

Na osnovu slike 4.16. opterećenje radnih mesta radnim nalogima je sledeće:

– Radno mesto RM1:

I radnog dana opterećenje iznosi 4h, II dana 2h, a III dana 0h i IV dana 5h.

– Radno mesto RM2:

I radnog dana opterećenje iznosi 4h, II i III dana po 2h, a IV dana 0h.

- Radno mesto RM3:

I radnog dana opterećenje iznosi 0h, II dana 9h, III dana 6h i IV dana 0h.

- Radno mesto RM4:

I radnog dana opterećenje iznosi 4h, II dana 6h, III dana 7h i IV dana 0h.

Na osnovu slike 4.16. vidi se da se javlja preopterećenje (opterećenje iznad 8h po danu) i to na radnom mestu RM3 (II dana – 9h).

Rešenje preopterećenja može se postići pomeranjem završetaka određenih radnih naloga za jedan radni dan unapred, pri čemu će ti radni nalozi kasniti 1 dan. Ukoliko potrošači prihvataju dato kašnjenje, opterećenje kapaciteta radnih mesta može biti uravnoteženo.

Kao što se vidi sa slike 4.16., za pomeranje ulaza za jedan dan se mogu razmatrati sva četiri radna naloga, jer se svi oni realizuju tog dana kada se javlja preopterećenje.

Ako se počne od radnog naloga R1, pomeranje njegovog završetka za 1 dan (III radnog dana) rešava se preopterećenje na radnom mestu RM3, ali to će dovesti do novog preopterećenja na radnom mestu RM3 – III dana, jer će se u tom slučaju R2 „nastaviti“ na radne naloge R2, R3 i R4. Takođe, to će dovesti do pojave preopterećenja i na radnom mestu RM4 – III dana. Iz tog razloga, radni nalog R1 neće biti pomeren.

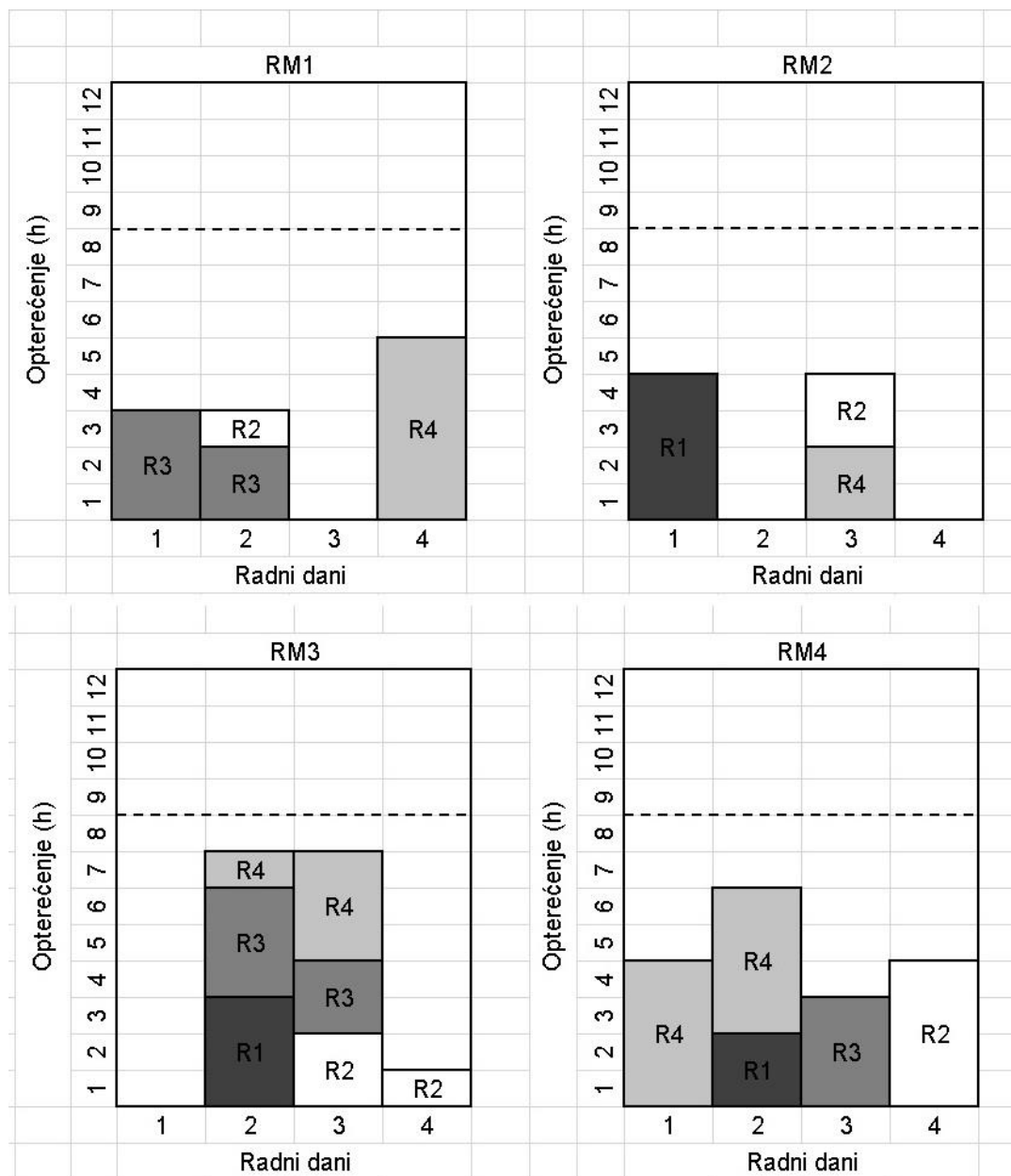
Ako se pomeri radni nalog R2, rešiće se preopterećenje radnog mesta RM3 i to neće dovesti do novog preopterećenja na drugim radnim mestima. To je moguće rešenje.

Ako se pomeri radni nalog R3, to će takođe rešiti preopterećenje radnog mesta RM3 i pri tome, neće doći do pojave novih preopterećenja. To je moguće rešenje.

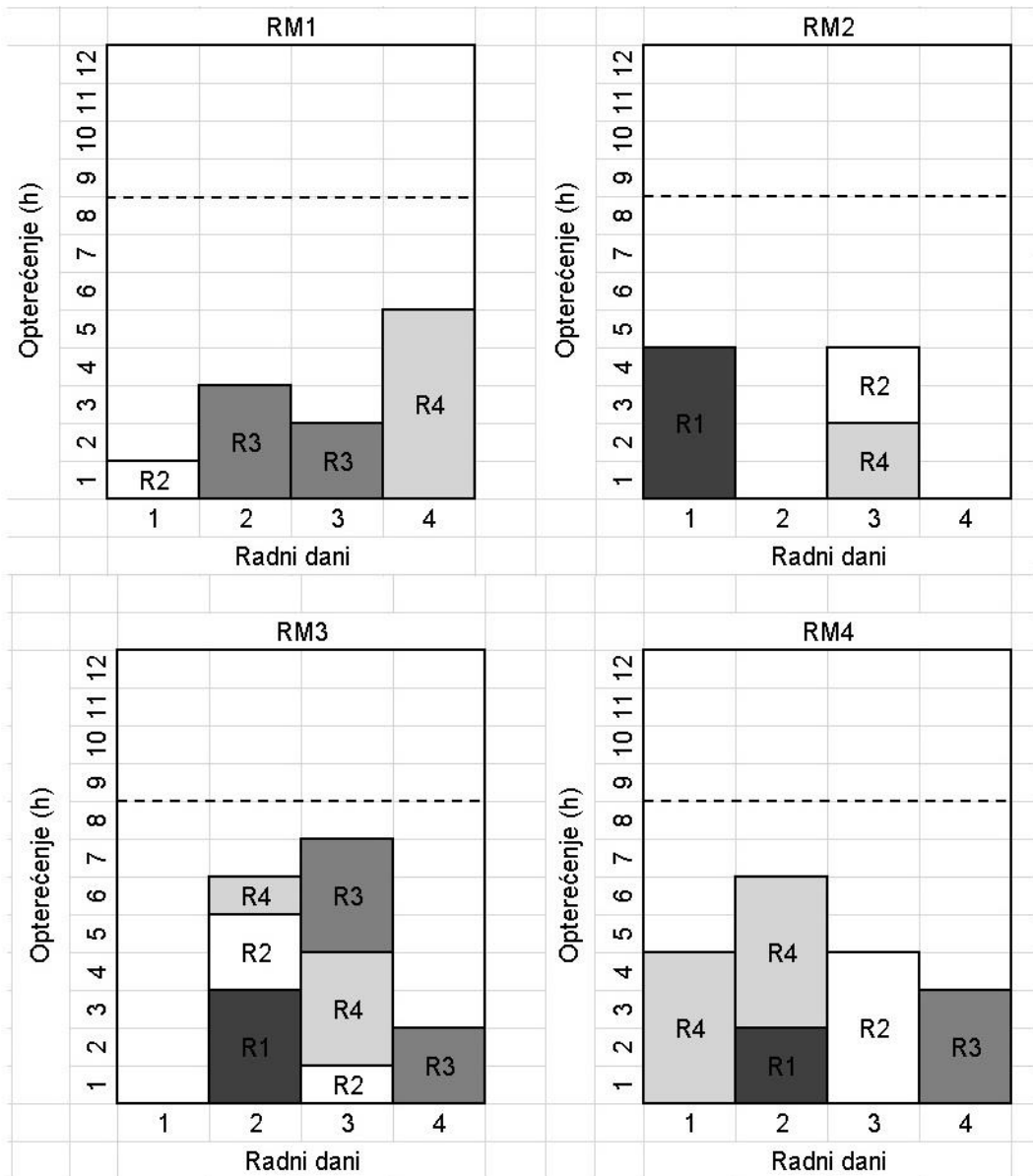
Ako se pomeri radni nalog R4, takođe se rešava problem preopterećenja na radnom mestu RM3, ali će to dovesti do pojave novog preopterećenja na radnom mestu RM4 – III radnog dana. Iz tog razloga, ovo pomeranje ne predstavlja rešenje problema.

Na slici 4.17. dato je uravnoteženje opterećenja pomeranjem radnog naloga R2.

Na slici 4.18. dato je uravnoteženje opterećenja pomeranjem radnog naloga R3.



Slika 4.17. Dijagram opterećenja radnih mesta radnim nalogima, nakon uravnoteženja pomeranjem radnog naloga R2



Slika 4.18. Dijagram opterećenja radnih mesta radnim nalogima, nakon uravnoteženja pomeranjem radnog naloga R3

**Zadatak 4.8.** U proizvodnom pogonu kompanije „Alfa“ se na četiti radna mesta sa identičnim tehnološkim sistemima (RM1, RM2, RM3 i RM4) izrađuje pet proizvoda (radnih naloga R1, R2, R3, R4 i R5). Radne naloge je potrebno vremenski raspodeliti na data radna mesta. Vremena potrebna za izradu svakog radnog naloga na svakom radnom mestu su data u tabeli 4.8.

**Tabela 4.8.** Vremena potrebna za izradu svakog radnog naloga na svakom radnom mestu

Radni nalog	Radno mesto / vreme trajanja operacija (h)	Rok završetka (dan)
R1	RM1/5, RM3/5, RM4/5	4
R2	RM1/2, RM2/3, RM3/4, RM4/5	5
R3	RM4/2, RM3/3, RM2/5	3
R4	RM2/7, RM3/4, RM4/6	5
R5	RM2/2, RM3/5, RM4/4, RM1/6	5

Merenjem u sistemu je određeno da je prosečno vreme transporta i čekanja 4h po svakom radnom mestu. Vreme trajanja efektivnog radnog dana je 6h. Vremenski raspored opterećenja kapaciteta radnih mesta radnim nalogima u posmatranoj kompaniji je potrebno odrediti metodom unazad. Izvršiti uravnoteženje opterećenja radnih mesta heurističkom metodom, ukoliko je to neophodno, odnosno ako postoji preopterećenje radnih mesta radnim nalogima.

### Rešenje:

Kod metode unazad, vremenske slike stanja počinju od postavljenih rokova završetaka za svaki radni nalog. Konstrukcija vremenske slike stanja se izvodi na sledeći način:

- Radni nalog R1 – 5h na radnom mestu RM4 IV radnog dana – 4h čekanje i transport – 5h na radnom mestu RM3 – 4h čekanje i transport – 5h na radnom mestu RM1 (sve unazad).
- Radni nalog R2 – 5h na radnom mestu RM4 V radnog dana – 4h čekanje i transport unazad – 4h na radnom mestu RM3 – 4h čekanje i transport – 3h na radnom mestu RM2 – 4h čekanje i transport – 2h na radnom mestu RM1 (sve unazad).
- Radni nalog R3 – 5h na radnom mestu RM2 III radnog dana – 4h čekanje i transport – 3h na radnom mestu RM3 – 4h čekanje i transport – 2h na radnom mestu RM4 (sve unazad).

- Radni nalog R4 – 6h na radnom mestu RM4 V radnog dana – 4h čekanje i transport – 4h na radnom mestu RM3 – 4h čekanje i transport – 7h na radnom mestu RM2 (sve unazad).
- Radni nalog R5 – 6h na radnom mestu RM1 V radnog dana – 4h čekanje i transport unazad – 4h na radnom mestu RM4 – 4h čekanje i transport – 5h na radnom mestu RM3 – 4h čekanje i transport – 2h na radnom mestu RM2 (sve unazad).

Shodno tome, vremenske slike stanja za svaki radni nalog je prikazan na slici 4.19.

U narednomkoraku se vrši izrada dijagrama opterećenja radnih mesta (RM1, RM2, RM3 i RM4) na osnovu proračunatih vremenskih slika stanja – slika 4.20.

Izrada dijagrama za svako radno mesto se izvodi na sledeći način:

- Radni nalog R1:

Unosi se radni nalog R1 na radno mesto RM4 u vremenu od 5h u IV radnom danu.  
Unosi se radni nalog R1 na radno mesto RM3 u vremenu od 3h u III radnom danu.  
Unosi se radni nalog R1 na radno mesto RM3 u vremenu od 2h u II radnom danu.  
Unosi se radni nalog R1 na radno mesto RM1 u vremenu od 5h u I radnom danu.

- Radni nalog R2:

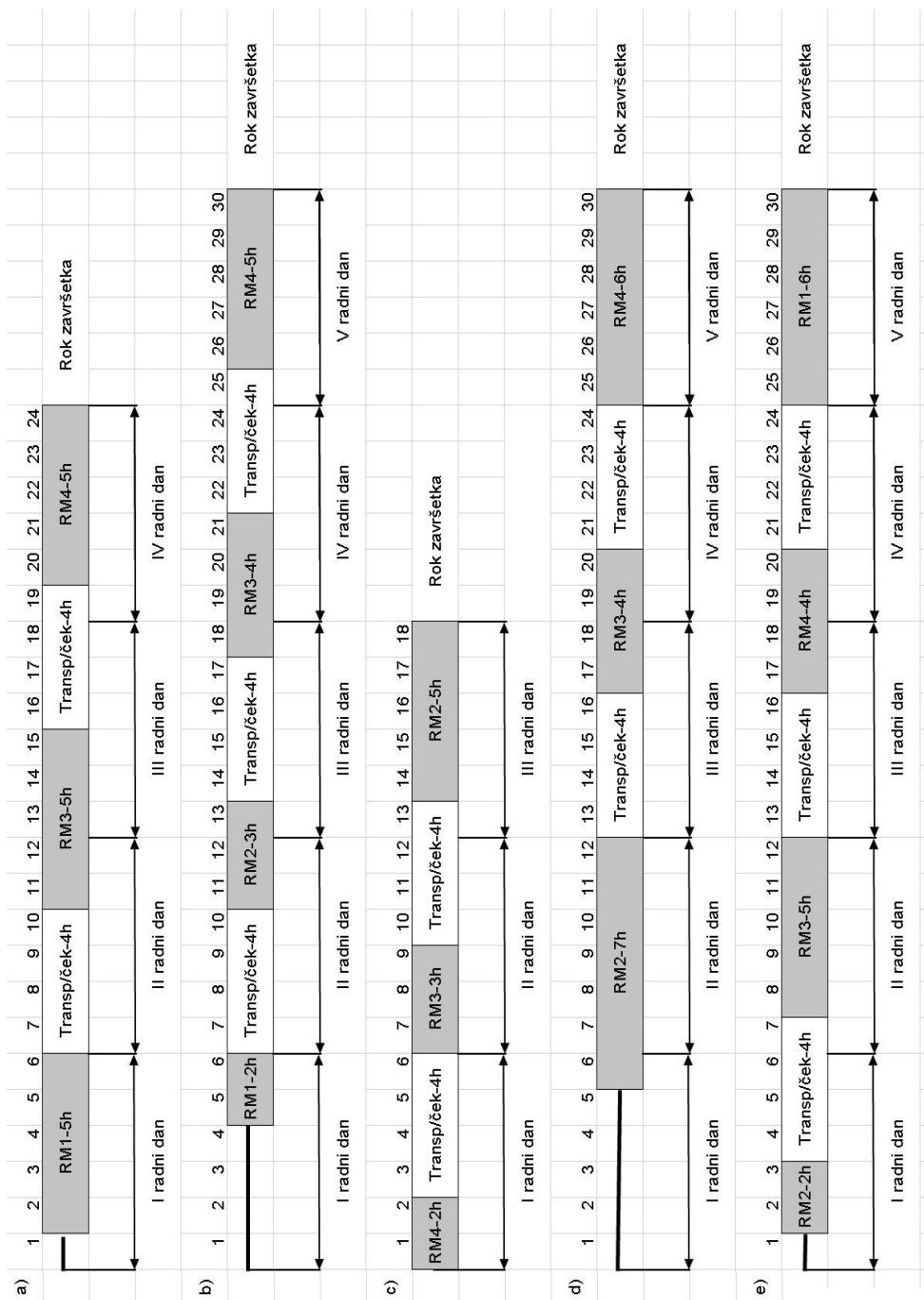
Unosi se radni nalog R2 na radno mesto RM4 u vremenu od 5h u V radnom danu.  
Unosi se radni nalog R2 na radno mesto RM3 u vremenu od 3h u IV radnom danu.  
Unosi se radni nalog R2 na radno mesto RM3 u vremenu od 1h u III radnom danu.  
Unosi se radni nalog R2 na radno mesto RM2 u vremenu od 1h u III radnom danu.  
Unosi se radni nalog R2 na radno mesto RM2 u vremenu od 2h u II radnom danu.  
Unosi se radni nalog R2 na radno mesto RM1 u vremenu od 2h u I radnom danu.

- Radni nalog R3:

Unosi se radni nalog R3 na radno mesto RM2 u vremenu od 5h u III radnom danu.  
Unosi se radni nalog R3 na radno mesto RM3 u vremenu od 3h u II radnom danu.  
Unosi se radni nalog R3 na radno mesto RM4 u vremenu od 2h u I radnom danu.

- Radni nalog R4:

Unosi se radni nalog R4 na radno mesto RM4 u vremenu od 6h u V radnom danu.  
Unosi se radni nalog R4 na radno mesto RM3 u vremenu od 2h u IV radnom danu.  
Unosi se radni nalog R4 na radno mesto RM3 u vremenu od 2h u III radnom danu.  
Unosi se radni nalog R4 na radno mesto RM2 u vremenu od 6h u II radnom danu.  
Unosi se radni nalog R4 na radno mesto RM2 u vremenu od 1h u I radnom danu.

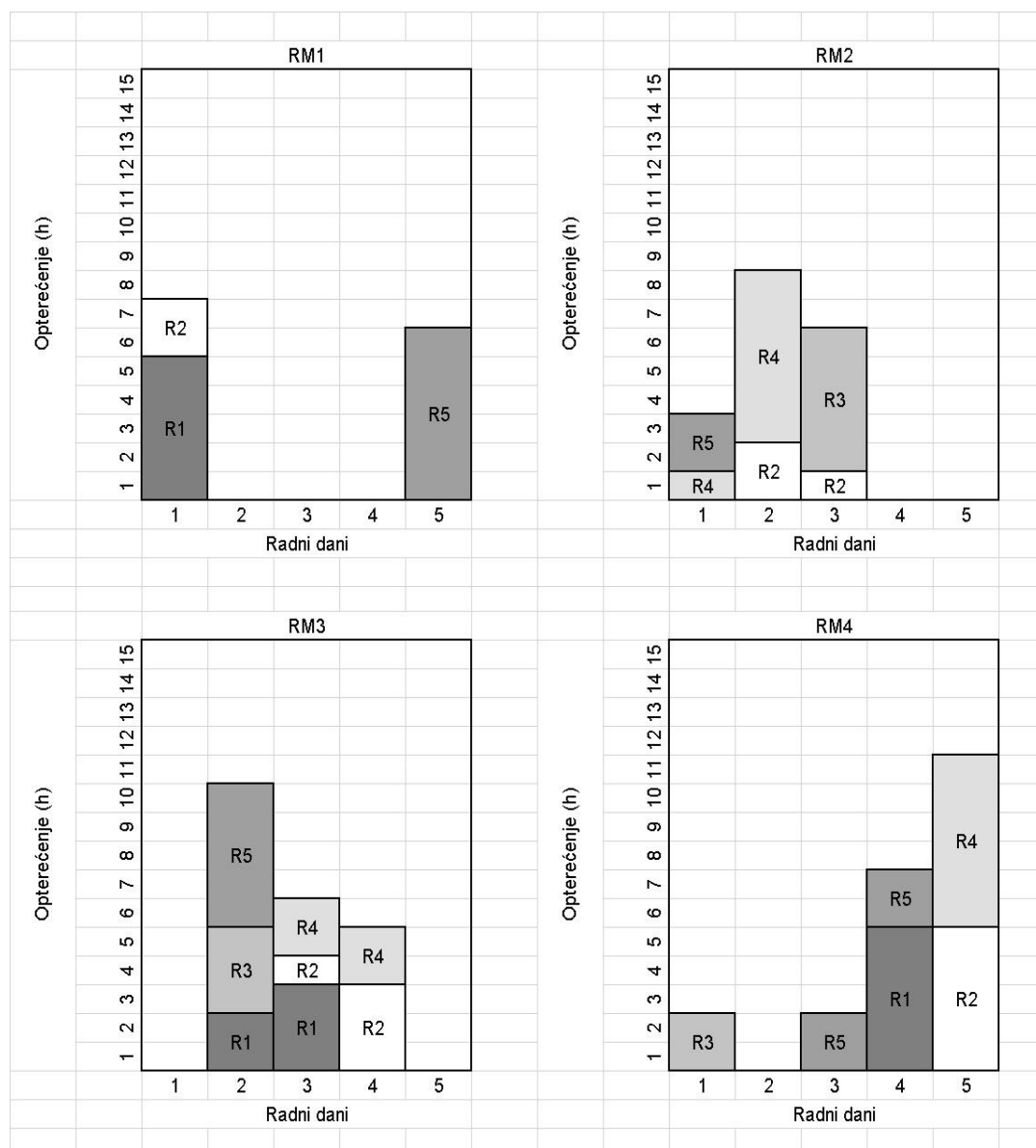


**Slika 4.19.** Grafik vremenskih slika stanja radnih naloga. a) vremenska slika stanja radnog naloga R1. b) vremenska slika stanja radnog naloga R2. c) vremenska slika stanja radnog naloga R3. d) vremenska slika stanja radnog naloga R4. e) vremenska slika stanja radnog naloga R5.



## – Radni nalog R5:

Unosi se radni nalog R5 na radno mesto RM1 u vremenu od 6h u V radnom danu.  
 Unosi se radni nalog R5 na radno mesto RM4 u vremenu od 2h u IV radnom danu.  
 Unosi se radni nalog R5 na radno mesto RM4 u vremenu od 2h u III radnom danu.  
 Unosi se radni nalog R5 na radno mesto RM3 u vremenu od 5h u II radnom danu.  
 Unosi se radni nalog R5 na radno mesto RM2 u vremenu od 2h u I radnom danu.



Slika 4.20. Dijagram opterećenja radnih mesta radnim nalogima

Na osnovu slike 4.20. opterećenje radnih mesta radnim nalogima je sledeće:

- Radno mesto RM1:

I radnog dana opterećenje iznosi 7h, II, III i IV dana 0h i V dana 6h.

- Radno mesto RM2:

I radnog dana opterećenje iznosi 3h, II dana 8h, III dana 6h, a IV i V dana 0h.

- Radno mesto RM3:

I radnog dana opterećenje iznosi 0h, II dana 10h, III dana 6h, IV dana 5h i V dana 0h.

- Radno mesto RM4:

I radnog dana opterećenje iznosi 2h, II dana 0h, III dana 2h, IV dana 7h i V dana 11h.

Na osnovu slike 4.20. vidi se da se javlja višestruko preopterećenje radnih mesta (opterećenje iznad 6h po danu). To značajno usložnjava proces uravnoteženja.

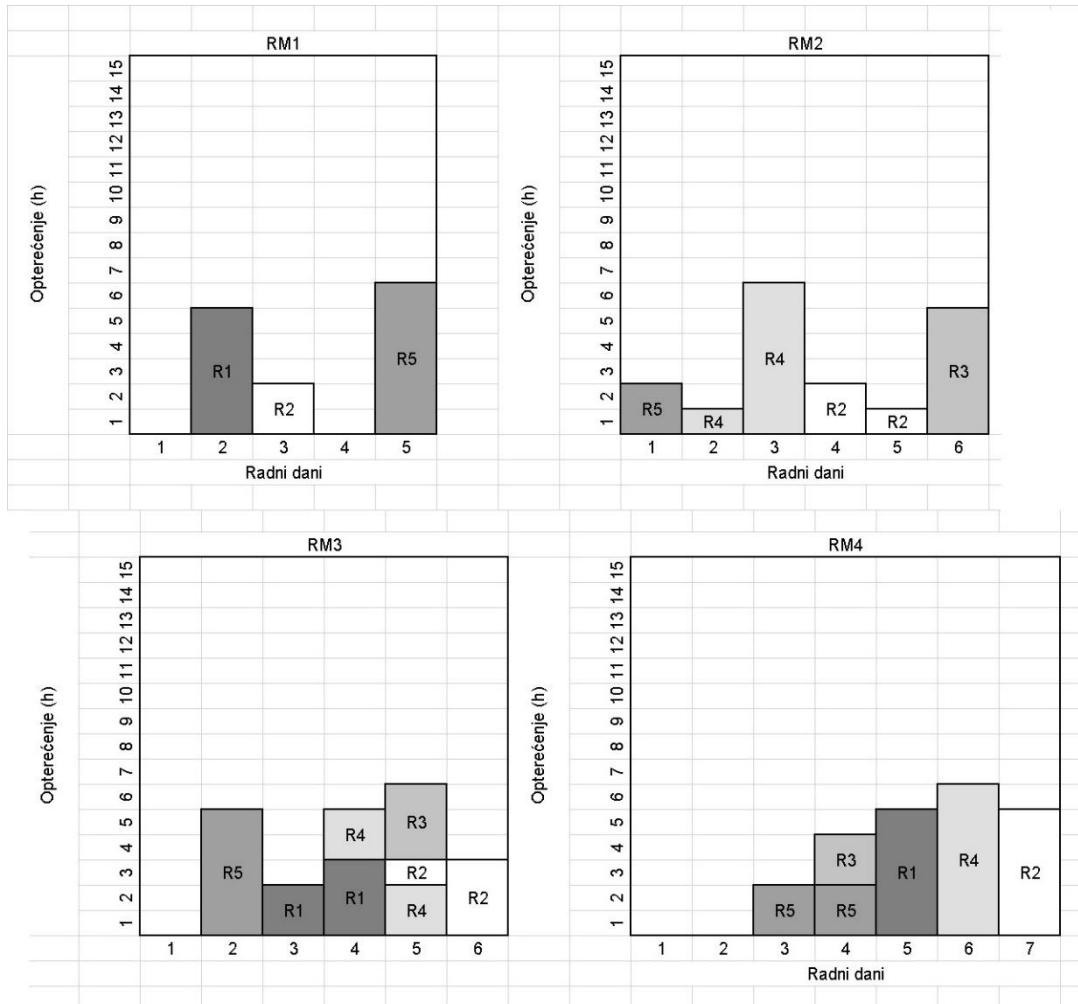
Rešenje preopterećenja može se postići pomeranjem završetaka određenih radnih naloga unapred, pri čemu će ti radni nalozi kasniti. Ukoliko klijenti prihvataju dato kašnjenje, opterećenje kapaciteta radnih mesta može biti uravnoteženo.

U konkretnom slučaju (slika 4.20.), koji je veoma složen, neophodno je izvršiti pomeranje ulaza više radnih naloga i to kod nekih i za više od jednog dana unapred (kašnjenje njihovog izvršavanja). Jedno od mogućih rešenja dobijeno heurističkom analizom je prikazano na slici 4.21. Tu su izvršena pomeranja sledećih radnih naloga:

- R1 – 1 dan,
- R2 – 2 dana,
- R3 – 3 dana, i
- R4 – 1 dan.

Kao što se vidi na slici 4.21. na radnim mestima RM2 i RM3 operacije će biti završene VI dana (1 dan zakašnjenja, dok će na radnom mestu RM4 operacije biti završene VII radnog dana (2 dana zakašnjenja).

Ovo uravnoteženje pokazuje koliko složeno može biti rešavanje problema preopterećenja radnih mesta radnim nalogima. Tu je neophodno razmatrati razne kombinacije pomeranja radnih naloga, njihov uticaj na druge radne naloge koje se ne pomeraju, pojavu novih mesta preopterećenja, prekoračenje rokova izvršenja radnih naloga i dr.



Slika 4.21. Dijagram opterećenja radnih mesta radnim nalogima, nakon uravnoteženja

**Zadatak 4.9.** U jednom preduzeću se na pet radna mesta koja imaju identične tehnološke sisteme (RM1, RM2, RM3, RM4 i RM5) izrađuju pet radna naloga (R1, R2, R3, R4 i R5), koje treba vremenski raspodeliti na data radna mesta. Vremena potrebna za izradu svakog radnog naloga na svakom radnom mestu su data u tabeli 4.9. (podaci su identični onima datih u zadatku 4.4.).

Merenjem u sistemu je određeno da je prosečno vreme transporta i čekanja 5h po svakom radnom mestu. Vreme trajanja efektivnog radnog dana je 7 h. Vremenski raspored opterećenja kapaciteta radnih mesta radnim nalogima odrediti metodom unazad. Izvršiti uravnoteženje opterećenja radnih mesta heurističkom metodom, ukoliko je to neophodno, odnosno ako postoji preopterećenje radnih mesta radnim nalogima.

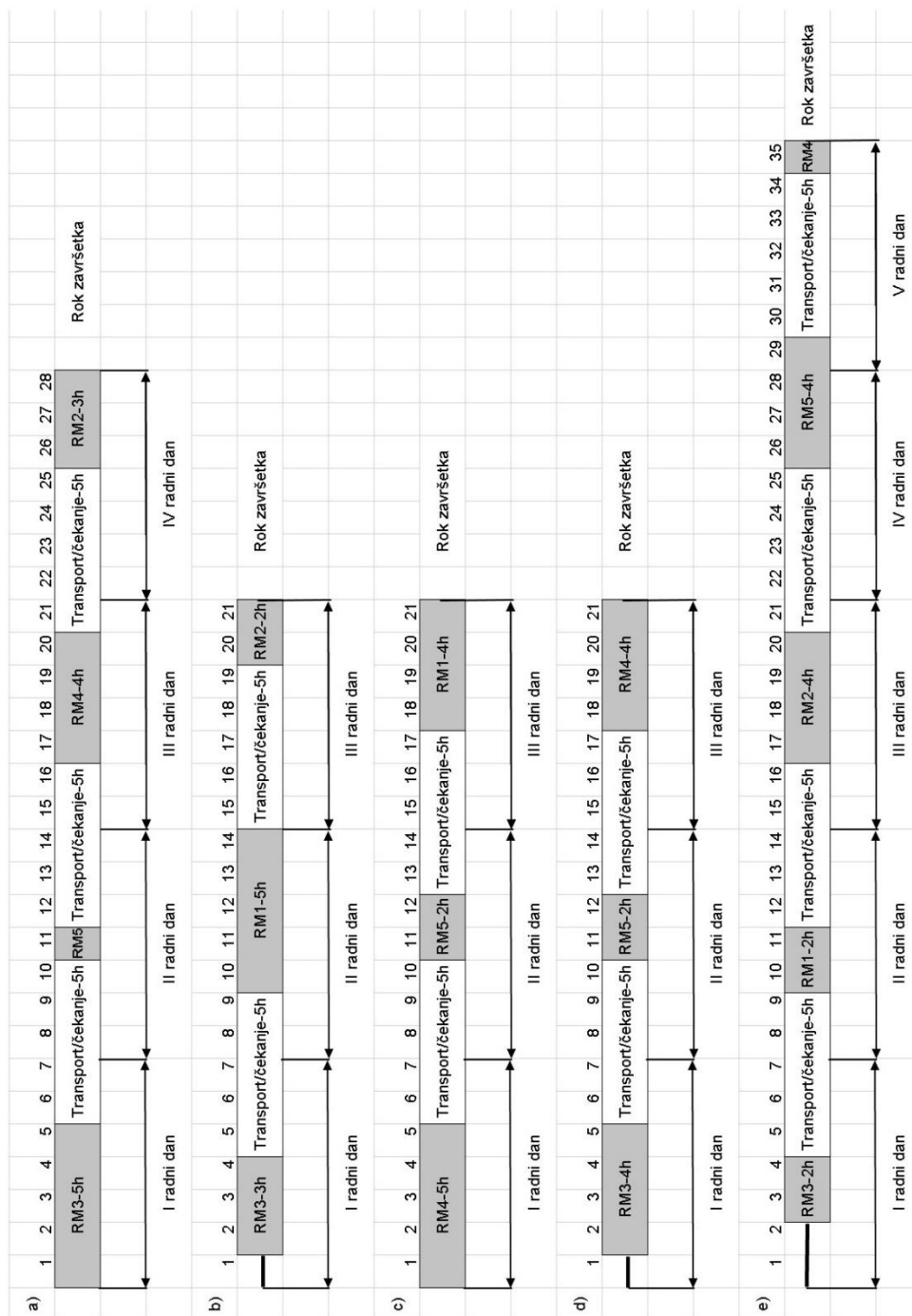
**Tabela 4.9.** Vremena potrebna za izradu svakog radnog naloga na svakom radnom mestu

Radni nalog	Radno mesto / vreme trajanja operacija (h)	Rok završetka (dan)
R1	RM3/5, RM5/1, RM4/4, RM2/3	4
R2	RM3/3, RM1/5, RM2/2	3
R3	RM4/5, RM5/2, RM1/4	3
R4	RM3/4, RM5/2, RM4/4	3
R5	RM3/2, RM1/2, RM2/4, RM5/4, RM4/1	5

**Rešenje:**

Prvo se vrši konstrukcija vremenske slike stanja za svaki radni nalog. Kod metode unazad, vremenske slike stanja počinju od postavljenih rokova završetaka za svaki radni nalog. Na slici 4.22. su prikazani grafici sa vremenskim skalama radnih naloga. Za proračun opterećenja se usvaja efektivni radni dan u trajanju od 7 sati. Konstrukcija vremenske slike stanja se vrši na sledeći način:

- Radni nalog R1 – 3h na radnom mestu RM2 – 5h čekanje i transport – 4h na radnom mestu RM4 – 5h čekanje i transport – 1h na radnom mestu RM5 – 5h čekanje i transport – 5h na radnom mestu RM3.
- Radni nalog R2 – 2h na radnom mestu RM2 – 5h čekanje i transport – 5h na radnom mestu RM1 – 5h čekanje i transport – 3h na radnom mestu RM3.
- Radni nalog R3 – 4h na radnom mestu RM1 – 5h čekanje i transport – 2h na radnom mestu RM5 – 5h čekanje i transport – 5h na radnom mestu RM4.
- Radni nalog R4 – 4h na radnom mestu RM4 – 5h čekanje i transport – 2h na radnom mestu RM5 – 5h čekanje i transport – 4h na radnom mestu RM3.
- Radni nalog R5 – 1h na radnom mestu RM4 – 5h čekanje i transport – 4h na radnom mestu RM5 – 5h čekanje i transport – 4h na radnom mestu RM2 – 5h čekanje i transport – 2h na radnom mestu RM1 – 5h čekanje i transport – 2h na radnom mestu RM3.



**Slika 4.22.** Grafik vremenskih slika stanja radnih naloga. a) vremenska slika stanja radnog naloga R.1. b) vremenska slika stanja radnog naloga R.2. c) vremenska slika stanja radnog naloga R.3. d) vremenska slika stanja radnog naloga R.4. e) vremenska slika stanja radnog naloga R.5.

U drugom koraku se vrši izrada dijagrama opterećenja radnih mesta (RM1, RM2, RM3, RM4 i RM5) na osnovu proračunatih vremenskih slika stanja – slika 4.23.

Izrada dijagrama za svako radno mesto se izvodi na sledeći način:

– Radni nalog R1:

Unosi se radni nalog R1 na radno mesto RM2 u vremenu od 2h u IV radnom danu.

Unosi se radni nalog R1 na radno mesto RM4 u vremenu od 4h u III radnom danu.

Unosi se radni nalog R1 na radno mesto RM5 u vremenu od 1h u II radnom danu.

Unosi se radni nalog R1 na radno mesto RM3 u vremenu od 5h u I radnom danu.

– Radni nalog R2:

Unosi se radni nalog R2 na radno mesto RM2 u vremenu od 2h u III radnom danu.

Unosi se radni nalog R2 na radno mesto RM1 u vremenu od 5h u II radnom danu.

Unosi se radni nalog R2 na radno mesto RM3 u vremenu od 3h u I radnom danu.

– Radni nalog R3:

Unosi se radni nalog R3 na radno mesto RM1 u vremenu od 4h u III radnom danu.

Unosi se radni nalog R3 na radno mesto RM5 u vremenu od 2h u II radnom danu.

Unosi se radni nalog R3 na radno mesto RM4 u vremenu od 5h u I radnom danu.

– Radni nalog R4:

Unosi se radni nalog R4 na radno mesto RM4 u vremenu od 4h u III radnom danu.

Unosi se radni nalog R4 na radno mesto RM5 u vremenu od 2h u II radnom danu.

Unosi se radni nalog R4 na radno mesto RM3 u vremenu od 4h u I radnom danu.

– Radni nalog R5:

Unosi se radni nalog R5 na radno mesto RM4 u vremenu od 1h u V radnom danu.

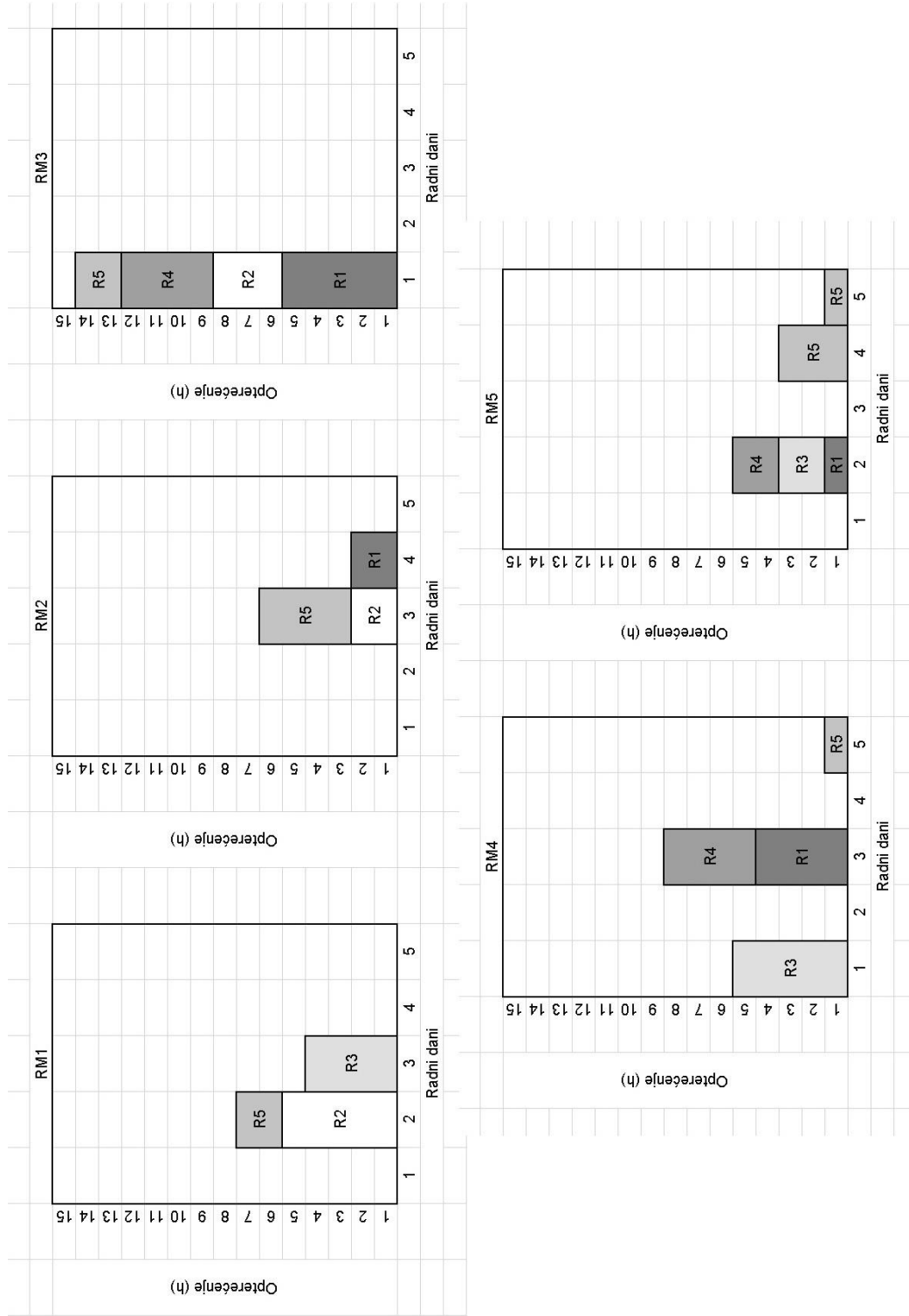
Unosi se radni nalog R5 na radno mesto RM5 u vremenu od 1h u V radnom danu.

Unosi se radni nalog R5 na radno mesto RM5 u vremenu od 3h u IV radnom danu.

Unosi se radni nalog R5 na radno mesto RM2 u vremenu od 4h u III radnom danu.

Unosi se radni nalog R5 na radno mesto RM1 u vremenu od 2h u II radnom danu.

Unosi se radni nalog R5 na radno mesto RM3 u vremenu od 2h u I radnom danu.



Slika 4.2.3. Dijagram opterećenja radnih mesta radnim nalozima

Na osnovu slike 4.23. opterećenje radnih mesta radnim nalogima je sledeće:

– Radno mesto RM1:

I, IV i V radnog dana nema opterećenja. II radnog dana opterećenje iznosi 7h, a III 4h.

– Radno mesto RM2:

I, II i V radnog dana nema opterećenja. III dana opterećenje iznosi 6h, a IV dana 2h.

– Radno mesto RM3:

I radnog dana opterećenje iznosi 14h, a ostalih dana nema opterećenja.

– Radno mesto RM4:

I radnog dana opterećenje iznosi 5h, II dana 0h, III dana 8h, IV dana 0h i V dana 1h.

– Radno mesto RM5:

I radnog dana nema opterećenja. II dana opterećenje je 5h, III dana 0h, IV dana 3h i V dana 1h.

Na osnovu slike 4.23. vidi se da se dva dana javlja preopterećenje (opterećenje iznad 7h po danu) i to na radnim mestima RM3 (I dana – 14h) i RM4 (III dana – 8h).

Rešenje preopterećenja može se postići kašnjenjem određenih radnih naloga za po 1 dan. Ukoliko klijenti prihvataju dato kašnjenje, opterećenje kapaciteta radnih mesta može biti uravnoteženo.

Kao što se vidi sa slike 4.23., za kašnjenje od jednog dana se mogu razmatrati radni nalozi R1, R2, R4 i R5 jer oni dovode do preopterećenja na gore navedena mesta.

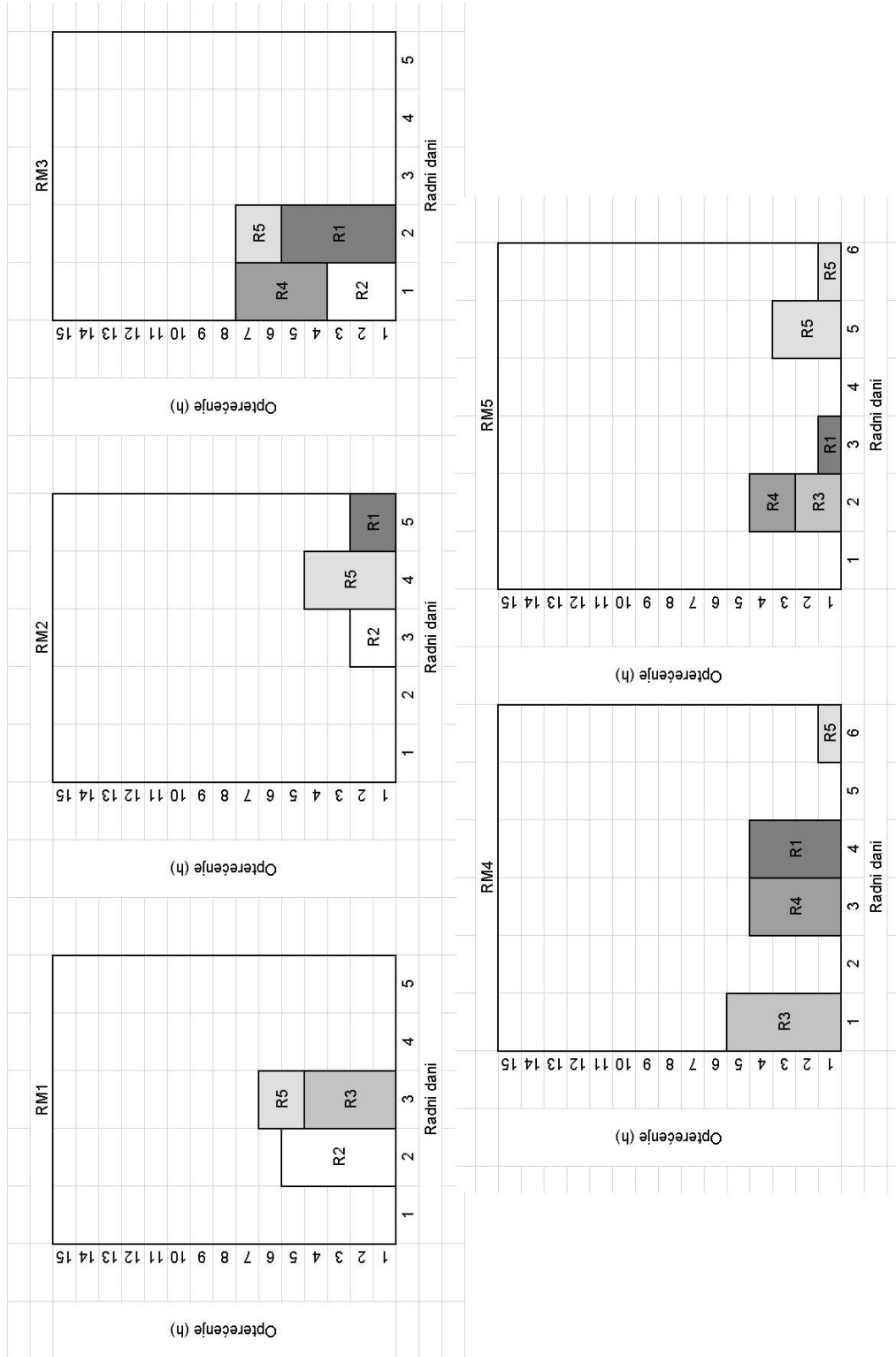
Radni nalog R1 se može pomeriti za jedan dan, čime se rešava preopterećenje na radnom mestu RM4, ali za rešavanje preopterećenja na radnom mestu RM3 neophodno je pomeriti još jedan radni nalog.

Pomeranjem radnog naloga R2 rešava se preopterećenje na radnom mestu RM3, ali to dovodi do novog preopterećenja na radnom mestu RM1 – III dana, tako da ovo ne predstavlja rešenje.

Isto se dešava i sa radnim nalogom R4, jer njegovim pomeranjem dolazi do preopterećenja na radnom mestu RM4 i to IV radnog dana. Iz tog razloga, i ovo ne može biti rešenje preopterećenja,

Na kraju, pomeranjem radnog naloga R5 rešava se problem preopterećenja i dolazi do uravnoteženja opterećenja radnih mesta radnim nalogima – slika 4.24.





SIKKA 4.24. Dijagram opterećenja radnih mesta radnim nalozima, nakon uravnoteženja

**Zadatak 4.10.** U jednom proizvodnom pogonu na tri radna mesta sa po jednim tehnološkim sistemom (RM1, RM2, RM3) se izrađuje četiri radnih naloga (R1, R2, R3, R4), koje treba vremenski raspodeliti na data radna mesta. Vremena potrebna za izradu svakog radnog naloga na svakom radnom mestu su data u tabeli 4.10.

**Tabela 4.10.** Vremena potrebna za izradu svakog radnog naloga na svakom radnom mestu

Radni nalog	Radno mesto / vreme trajanja operacija (h)	Rok završetka (dan)
R1	RM1/5, RM2/3, RM3/7	2
R2	RM2/5, RM3/7, RM1/6	3
R3	RM2/5, RM1/6	2
R4	RM1/7, RM2/4, RM3/3	2

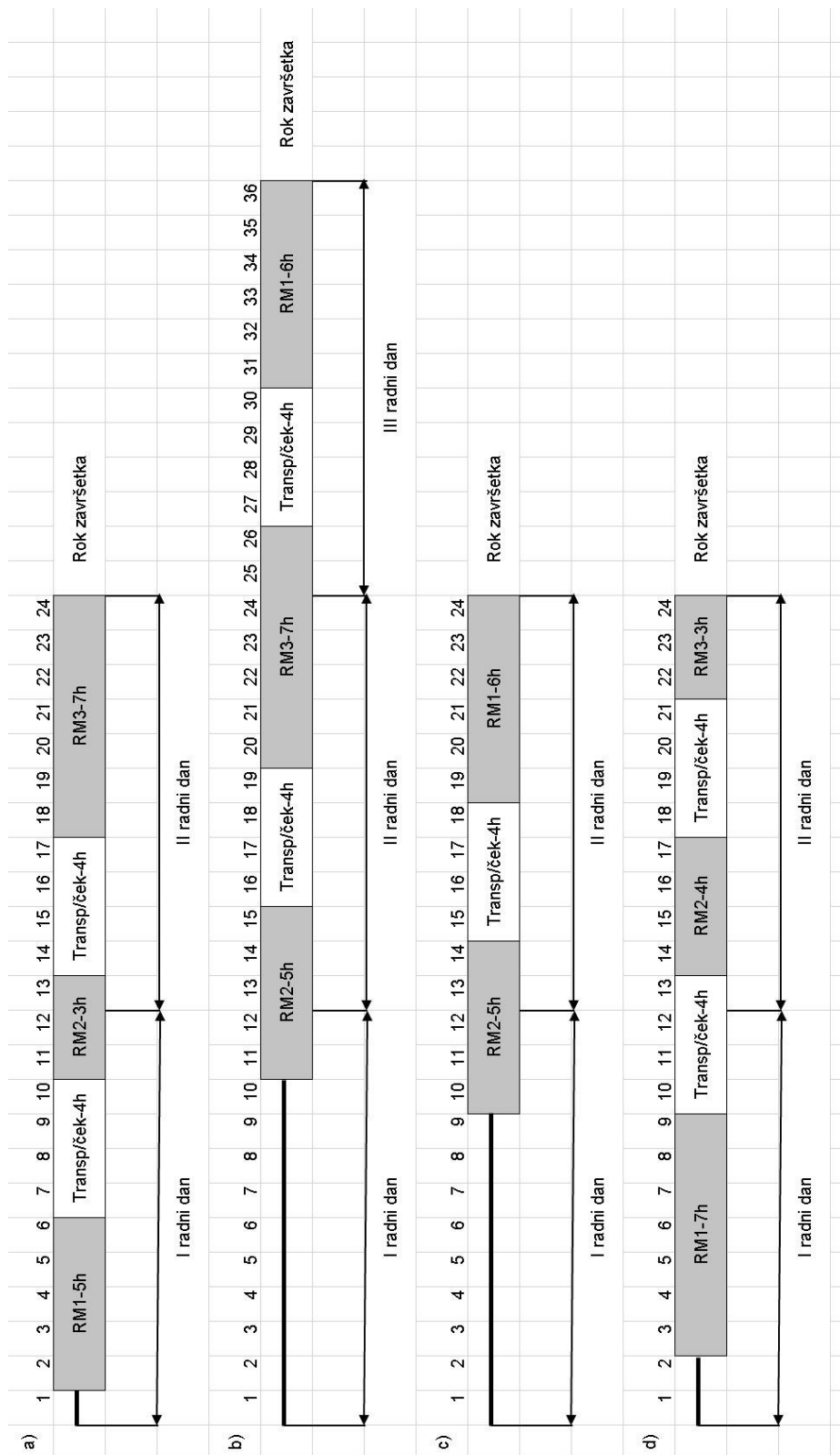
Pretpostavka je da su raspoloživa vremena rada tehnoloških sistema jedina ograničavajuća veličina. Veći deo vremena radni nalozi provode u transportu i čekanju na izvršenje operacija obrade. Prosečno vreme transporta i čekanja je 4 h po svakom radnom mestu. Vreme trajanja efektivnog radnog dana je 12 h. Vremenski raspored opterećenja kapaciteta radnih mesta radnim naložima odrediti metodom unazad.

### Rešenje:

Prvo treba napraviti vremenske slike stanja za svaki radni nalog. Na slici 4.25. prikazane su navedene slike stanja radnih naloga.

Početak vremenske slike stanja je od postavljenih rokova završetaka za svaki radni nalog, pošto se opterećenje određuje metodom unazad u vremenu. Konstrukcija vremenske slike stanja se izvodi na sledeći način:

- Radni nalog R1 – 7h na radnom mestu RM3 II radnog dana – 4h čekanje i transport – 3h na radnom mestu RM2 – 4h čekanje i transport – 5h na radnom mestu RM1 (sve unazad).
- Radni nalog R2 – 6h na radnom mestu RM1 III radnog dana – 4h čekanje i transport unazad – 7h na radnom mestu RM3 – 4h čekanje i transport – 5h na radnom mestu RM2 (sve unazad).
- Radni nalog R3 – 6h na radnom mestu RM1 II radnog dana – 4h čekanje i transport – 5h na radnom mestu RM2 (sve unazad).
- Radni nalog R4 – 3h na radnom mestu RM3 II radnog dana – 4h čekanje i transport – 4h na radnom mestu RM2 – 4h čekanje i transport – 7h na radnom mestu RM1 (sve unazad).



Slika 4.25. Grafik vremenskih slika stanja radnih naloga. a) vremenska slika stanja radnog naloga R.1. b) vremenska slika stanja radnog naloga R.2. c) vremenska slika stanja radnog naloga R.3. d) vremenska slika stanja radnog naloga R.4.

U drugom koraku se vrši izrada dijagrama opterećenja radnih mesta (RM1, RM2 i RM3) na osnovu proračunatih vremenskih slika stanja – slika 4.26.

Izrada dijagrama opterećenja za svako radno mesto se izvodi na sledeći način:

– Radni nalog R1:

Unosi se radni nalog R1 na radno mesto RM3 u vremenu od 7h u II radnom danu.

Unosi se radni nalog R1 na radno mesto RM2 u vremenu od 1h u II radnom danu.

Unosi se radni nalog R1 na radno mesto RM2 u vremenu od 2h u I radnom danu.

Unosi se radni nalog R1 na radno mesto RM1 u vremenu od 5h u I radnom danu.

– Radni nalog R2:

Unosi se radni nalog R2 na radno mesto RM1 u vremenu od 6h u III radnom danu.

Unosi se radni nalog R2 na radno mesto RM3 u vremenu od 2h u III radnom danu.

Unosi se radni nalog R2 na radno mesto RM3 u vremenu od 5h u II radnom danu.

Unosi se radni nalog R2 na radno mesto RM2 u vremenu od 3h u II radnom danu.

Unosi se radni nalog R2 na radno mesto RM2 u vremenu od 2h u I radnom danu.

– Radni nalog R3:

Unosi se radni nalog R3 na radno mesto RM1 u vremenu od 6h u II radnom danu.

Unosi se radni nalog R3 na radno mesto RM2 u vremenu od 2h u II radnom danu.

Unosi se radni nalog R3 na radno mesto RM2 u vremenu od 3h u I radnom danu.

– Radni nalog R4:

Unosi se radni nalog R4 na radno mesto RM3 u vremenu od 3h u II radnom danu.

Unosi se radni nalog R4 na radno mesto RM2 u vremenu od 4h u II radnom danu.

Unosi se radni nalog R4 na radno mesto RM1 u vremenu od 7h u I radnom danu.

Na osnovu slike 4.26. opterećenje radnih mesta radnim nalogima je sledeće:

– Radno mesto RM1:

I radnog dana opterećenje iznosi 12h, a II i III dana po 6h.

– Radno mesto RM2:

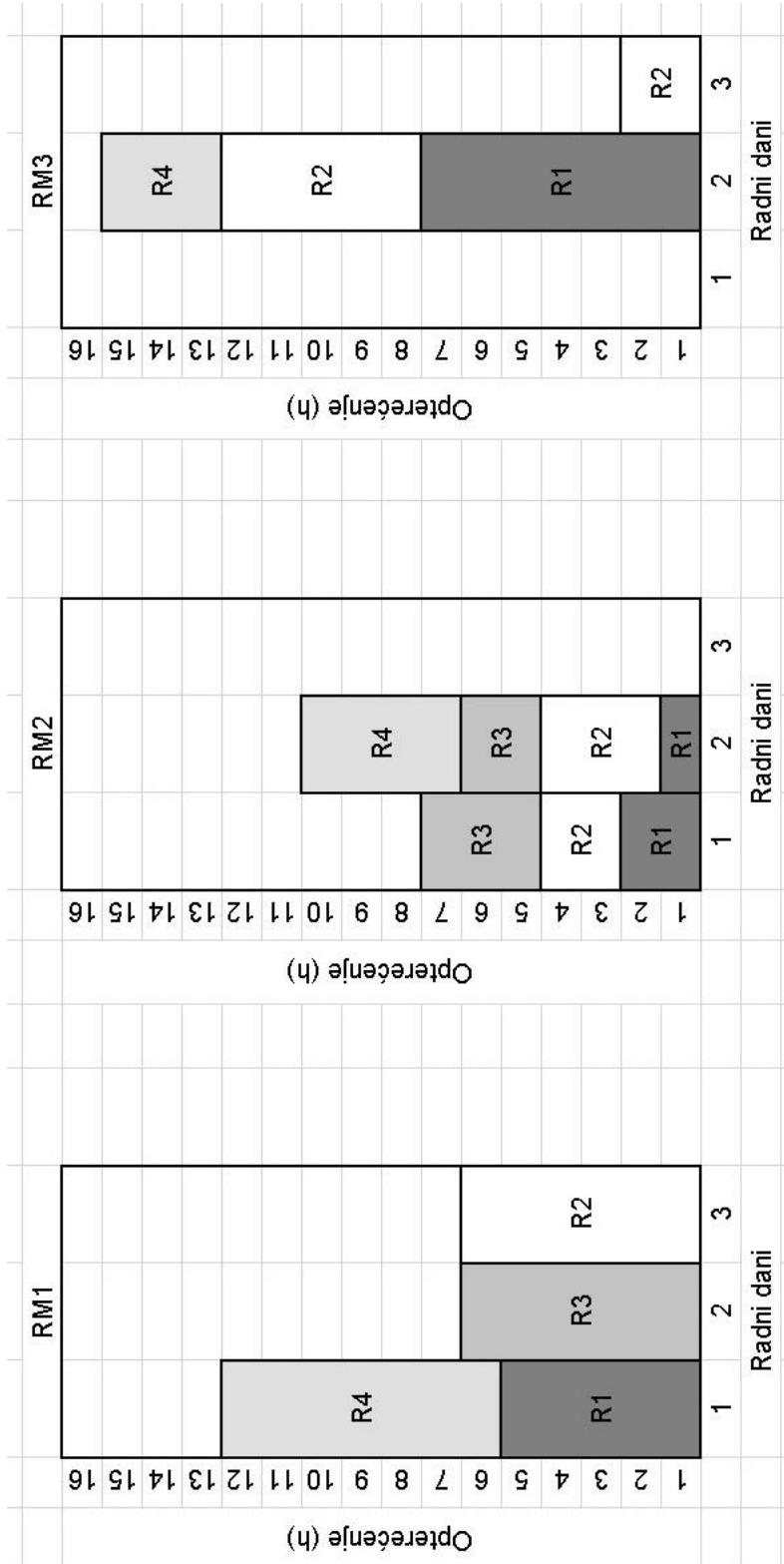
I radnog dana opterećenje iznosi 7h, II dana 10h, a III dana 0h.

– Radno mesto RM3:

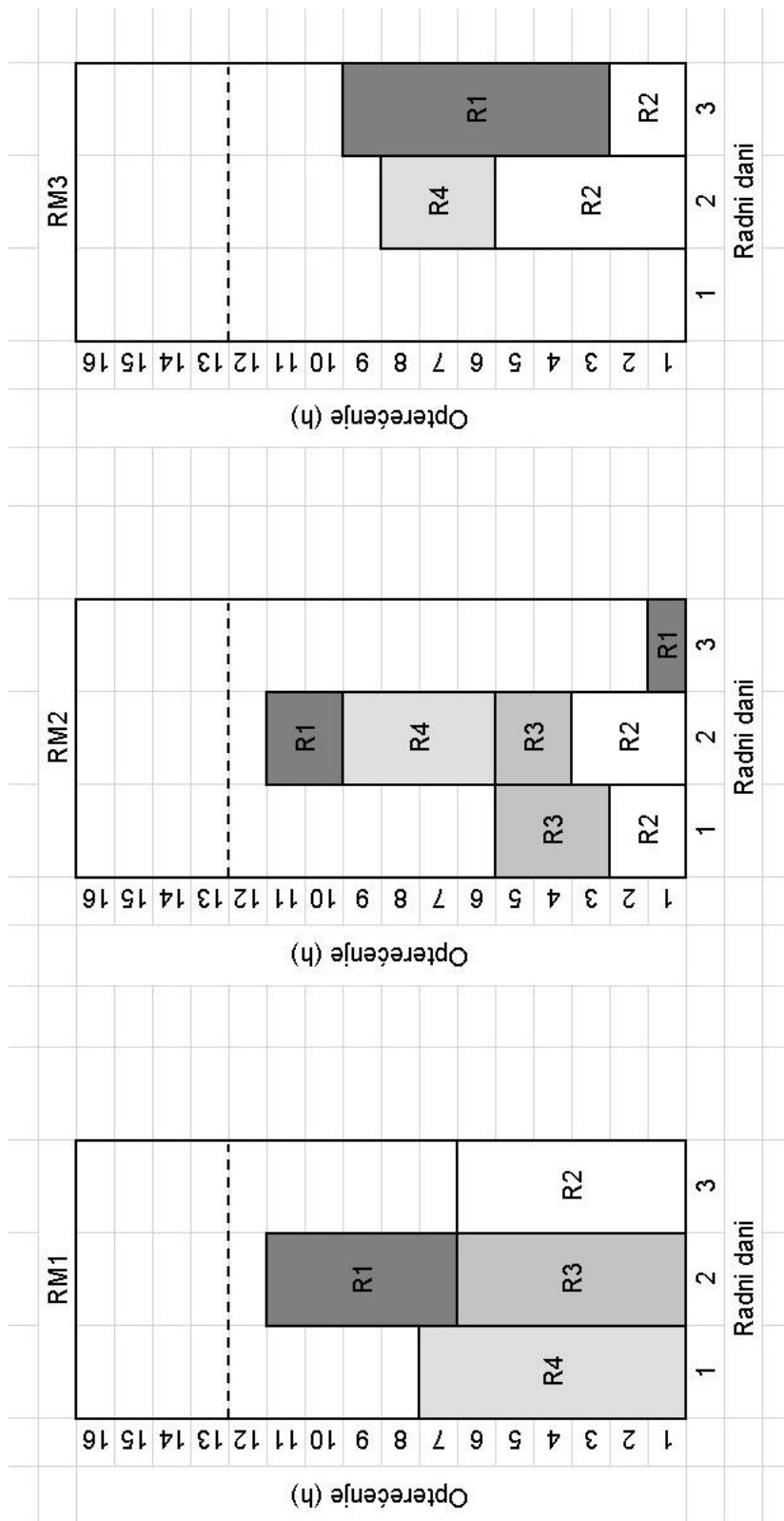
I radnog dana opterećenje iznosi 0h, II dana 15h, a III dana 2h.

Na osnovu slike 4.26. vidi se da se javlja preopterećenje (opterećenje iznad 12h po danu) i to na radnom mestu RM3 (II dana – 15h).

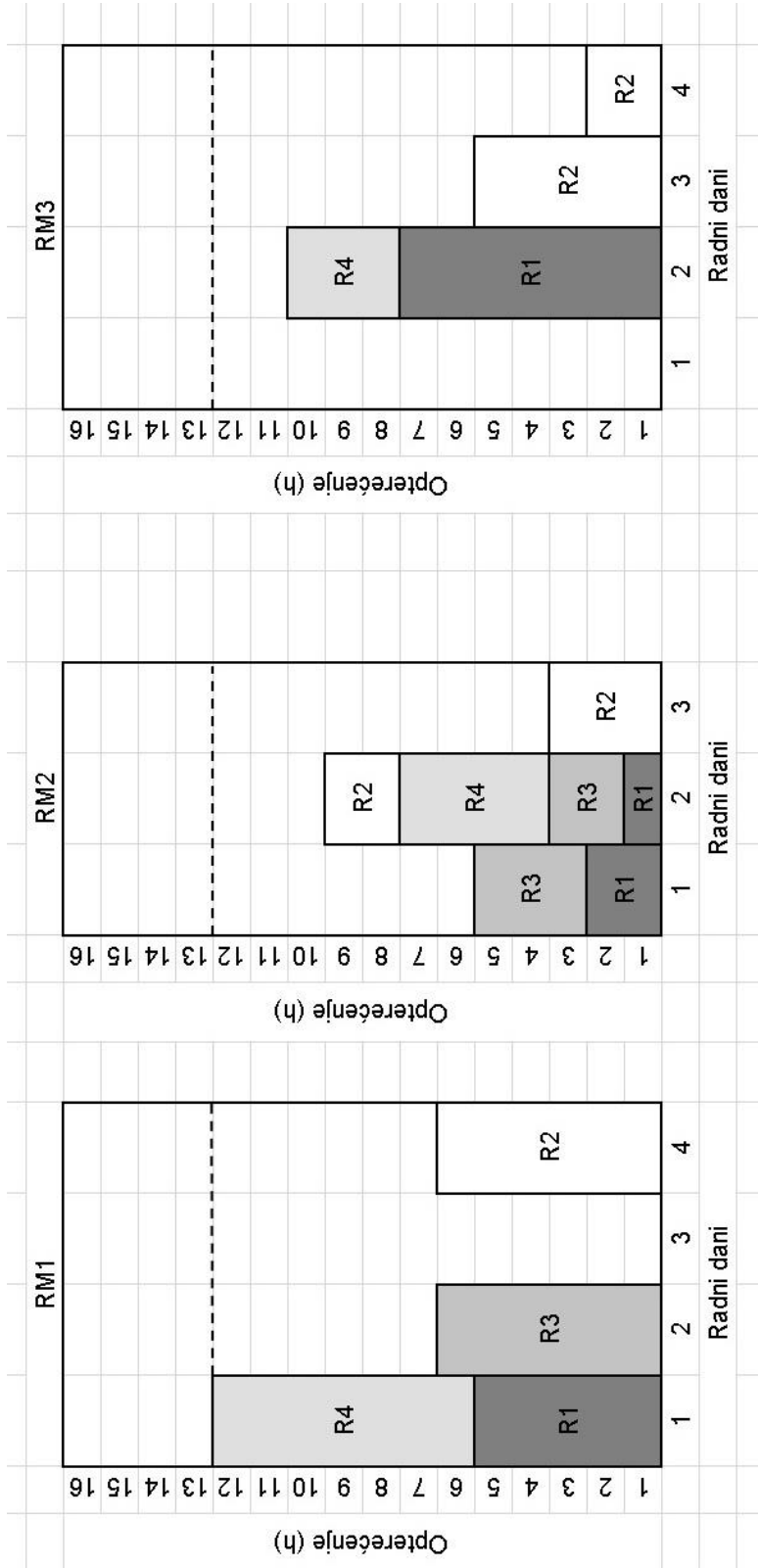
Rešenje preopterećenja može se postići kašnjenjem određenog radnog naloga za 1 dan. Ukoliko klijenti prihvataju dato kašnjenje, opterećenje kapaciteta radnih mesta može biti uravnoteženo.



Slika 4.26. Dijagram opterećenja radnih mesta radnim nalozima



4.27. Dijagram opterećenja radnih mesta radnim nalogima, nakon uravnoteženja pomeranjem radnog naloga R1



SILKA 4.28. Dijagram opterećenja radnih mesta radnim nalogima, nakon uravnoteženja pomeranjem radnog naloga R2

Kao što se vidi sa slike 4.26., za kašnjenje od jednog dana se mogu razmatrati radni nalozi R1, R2 i R4 jer oni dovode do preopterećenja na gore navedenom radnom mestu.

Radni nalog R1 se može pomeriti za jedan dan, čime se rešava preopterećenje na radnom mestu RM3, a pri tome se ne javlja novo preopterećenje na ostalim pozicijama (radnim mestima).

Pomeranjem radnog naloga R2 takođe se rešava preopterećenje na radnom mestu RM3 i pri tome se ne javlja novo preopterećenje, tako da i ovo predstavlja rešenje.

Ako se pomeri radni nalog R4 za jedan dan, rešava se preopterećenje na RM3, ali njegovim pomeranjem dolazi do preopterećenja na radnom mestu RM1 i to II radnog dana. Iz tog razloga, ovo ne može biti rešenje preopterećenja.

Na osnovu napred navedenog, postoje dva rešenja – da se pomeri radni nalog R1 ili da se pomeri radni nalog R2. Na slikama 4.27. i 4.28. prikazana su uravnoteženja pomeranjem ovih radnih naloga.



## 5. TERMINIRANJE REDOSLEDA RADNIH NALOGA

### 5.1. TEORIJSKI UVOD

Terminiranje redosleda radnih naloga predstavlja proces tačnog postavljanja redosleda izvođenja operacija izrade predmeta rada. U određivanju redosleda, vremena transporta i čekanja se ne pretpostavljaju kao u slučaju proračuna opterećenja kapaciteta radnih mesta, već se ona izračunavaju pri izradi terminskog plana za svaki radni nalog. U daljem tekstu obradiće se dve metode za terminiranje radnih naloga, a to su:

- Gantov dijagram, i
- Problem terminiranja  $m \times n$ .

**Gantov dijagram** je najčešće primenjivana metoda u terminiranju redosleda radnih naloga. Dijagram se sastoji od horizontalne ose na kojoj se nalazi vreme, a na vertikalnoj osi ograničeni resursi (radna mesta, tehnološki sistemi, sati izrade, ljudski resursi,...). Radni nalozi se po unapred određenom redosledu terminiraju na sva radna mesta. Nakon formiranja, sa Gantovog dijagrama se može odrediti iskorišćenost tehnoloških sistema, koja se utvrđuje sumiranjem praznih hodova tehnoloških sistema i izračunavanjem procenta iskorišćenosti.

Gantov dijagram pokazuje da su vremena čekanja radnih naloga različita, a ne konstantna kao što se pretpostavlja u postupku opterećenja kapaciteta radnih mesta. Shodno tome, terminiranje pomoću Gantovog dijagrama je mnogo preciznije jer on uzima u obzir poremećaje u procesima rada i proračunava vreme čekanja za svaki radni nalog. Nedostatak Gantovog dijagrama se sastoji u tome što ceo postupak postaje vrlo složen u uslovima kada se terminira veći broj radnih naloga na većem broju radnih mesta.

**Problem terminiranja  $m \times n$**  tehnoloških sistema, gde je  $m$  broj tehnoloških sistema, a  $n$  broj radnih naloga, predstavlja metodu za određivanje optimalnog redosleda realizacije radnih naloga u cilju dobijanja najkraćeg ukupnog vremena njihove izrade. Problem  $m \times n$  terminiranja radnih naloga je rešen za sledeće brojeve tehnoloških sistema:  $m=1,2,3$  i proizvoljno izabrane vrednosti  $n$ . Za veći broj tehnoloških sistema ( $m \geq 4$ ) nije postavljen efikasan algoritam za rešenje problema, obzirom na veliki broj kombinacija mogućih redosleda radnih naloga. U tim

slučajevima koriste se odgovarajući heuristički algoritmi koji daju, u većini slučajeva, dobre rezultate.

Najjednostavniji  $m \times n$  problem terminiranja radnih naloga je kada je broj tehnoloških sistema  $m=1$  i to za proizvoljno izabranu vrednost  $n$ . Tada su ukupno vreme izrade i iskorišćenost tehnoloških sistema konstantne veličine, jer se problem svodi na određivanje minimalnog vremena isporuke proizvoda zbog postojanja vremena čekanja radnih naloga. Problem se rešava tako što se na prvo mesto u redosledu postavlja radni nalog koji ima najkraće vreme izrade.

Kod problema terminiranja za  $m=2$  (dva tehnološka sistema) polazi se od pretpostavke da se svi radni nalozi prvo izrađuju na prvom tehnološkom sistemu, a zatim na drugom tehnološkom sistemu i to po unapred određenom redosledu. Kod utvrđivanja redosleda prvo se vrši pronalaženje najkraćeg vremena izrade. U zavisnosti od toga u kojoj koloni se nalazi dato vreme (u levoj ili desnoj), odgovarajući radni nalog se stavlja prvi u redosledu ali sa odgovarajuće strane (leve ili desne, zavisno od položaja najkraćeg vremena izrade). Postupak se ponavlja za sve radne naloge. Dobijeni redosled daje najkraće ukupno vreme izrade i minimalno čekanje tehnoloških sistema na početak izrade. Izračunavanje ukupnog vremena izrade se vrši konstruisanjem Gantovog dijagrama za dobijeni redosled radnih naloga.

## 5.2. GANTOV DIJAGRAM

**Zadatak 5.1.** U jednom proizvodnom pogonu na tri radna mesta sa po jednim tehnološkim sistemom (RM1, RM2, RM3) se izrađuje pet radnih naloga (R1, R2, R3, R4, R5), koje treba vremenski raspodeliti na data radna mesta. Vremena potrebna za izradu svakog radnog naloga na svakom radnom mestu su data u tabeli 5.1.

**Tabela 5.1.** Vremena potrebna za izradu svakog radnog naloga na svakom radnom mestu

Radni nalog	Radno mesto / vreme trajanja operacija (h)	Rok završetka (dan)
R1	RM1/4, RM2/6, RM3/7	3
R2	RM3/11, RM1/8	6
R3	RM2/6, RM3/4, RM1/2	6
R4	RM3/8, RM2/6, RM1/6	6
R5	RM1/10, RM2/6	6

Radni nalozi se terminiraju unapred pri čemu su kapaciteti odgovarajućih tehnoloških sistema ograničeni, a redosled radnih naloga je R1, R4, R5, R2, R3. Efektivno radno vreme iznosi 7h na dan. Koristeći Gantov dijagram uraditi sledeće:

- Terminirati radne naloge na radna mesta,
- Odrediti vremena stajanja na svakom radnom mestu i ukupno vreme stajanja,
- Odrediti vremena čekanja svakog radnog naloga i njihova vremena završetka,  
i
- Odrediti procenat iskorišćenja vremena rada celog sistema.

### Rešenje:

a)

Prvo se radni nalog R1 terminira na sva tri radna mesta. Radni nalog R1 se izrađuje na radnom mestu RM1 u trajanju od 4 sata, zatim odlazi na radno mesto RM2 gde se obrađuje 6 sata i na kraju na RM3 gde se obrađuje 7 sata – slika 5.1. a).

U drugom koraku se terminira radni nalog R4 na radna mesta RM3, RM2 i RM1 sa vremenima obrade u trajanju od 8h, 6h i 6h respektivno. Obrada radnog naloga R4 može odmah da počne na radnom mestu RM3, obzirom da je dato radno mesto slobodno do vremenskog perioda 10h. Nakon čekanja od 2 sata obrada R4 može da krene na radno mesto RM2. Na kraju, R4 se može obrađivati na radnom mestu RM1 u vremenskom periodu od 16h do 22h – slika 5.1. b).

Sledeći se terminira radni nalog R5. On se prvo obrađuje na RM1 u vremenskom periodu 4h do 14h (10h). Nakon toga, R5 se prenosi na radno mesto RM2 koje je zauzeto do vremenskog perioda 16h, tako da se obrada izvodi u periodu od 16h do 22h (6h) – slika 5.1. c).

Sledeći na redu je radni nalog R2. On se prvo obrađuje na RM3 u vremenskom periodu 17h do 28h (11h). Nakon toga, R2 odlazi na radno mesto RM1 gde se obrađuje u periodu od 28h do 36h (8h) – slika 5.1. d).

Poslednji se obrađuje radni nalog R3. On se prvo obrađuje na RM2 u vremenskom periodu 22h do 28h (6h). Nakon toga, R3 ide na radno mesto RM3 gde se obrađuje u periodu od 28 do 32 (4h). Na kraju, R3 se prebacuje na radno mesto RM1 gde se obrađuje 2h u vremenskom periodu od 36h do 38h – slika 5.1. e).

Na slici 5.1. f) prikazan je konačan oblik Gantovog dijagrama.

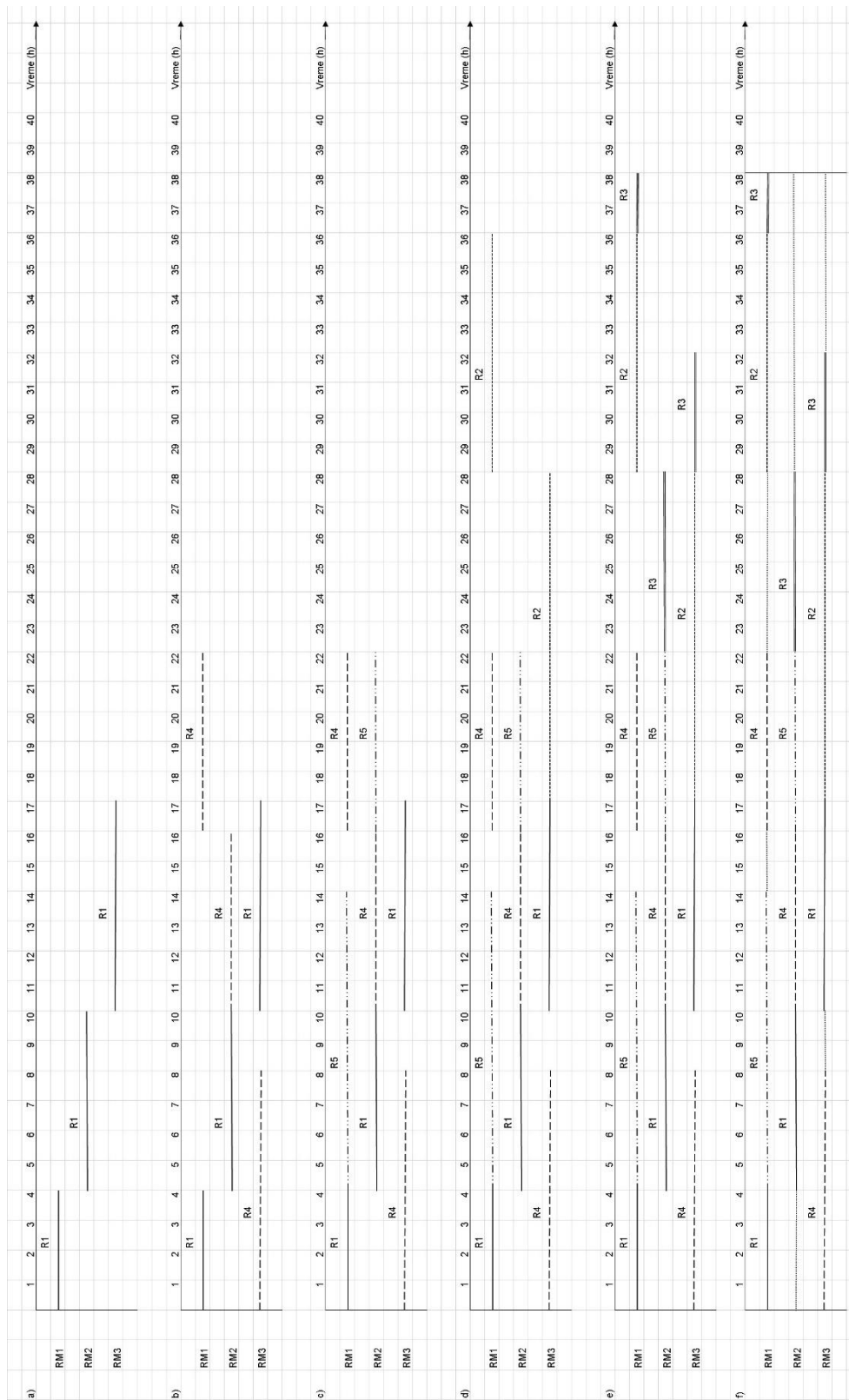
**b)**

Vremena stajanja na svakom radnom mestu se sabiraju. Na grafiku su ona prikazana pomoću tačkastih linija. Na radnom mestu RM1 stajanje se javlja između vremenskog perioda 14h i 16h (2h), kao i između 22h i 28h (6h). Shodno tome, ukupno vreme stajanja na ovom radnom mestu iznosi 8h. Na isti način se određuju vremena stajanja na ostala radna mesta. Na radnom mestu RM2 zastoji se javljaju u vremenskim periodima od 0h do 4h (4h) i od 28h do 38h (10h). Ukupno vreme stajanja na ovom radnom mestu iznosi 14h. Na radnom mestu RM3 stajanja se javljaju u vremenskim periodima od 8h do 10h (2h) i od 32h do 38h (6h), što ukupno iznosi 8h stajanja.

Ukupno vreme stajanja se dobija sabiranjem svih vremena stajanja, odnosno  $8h+14h+8h = 30h$ .

**c)**

Vremena čekanja radnih naloga se računa sabiranjem vremena čekanja do početaka njihove obrade i vremena čekanja kada radni nalozi prelaze na sledeća radna mesta, a ne počinje se odmah sa njihovom izradom zbog zauzetosti tih narednih radnih mesta.



Slika 5.1. Gantov dijagram terminiranja radnih mesta radnim nalozima

Radni nalog R1 nema čekanja jer on počinje odmah sa obradom, a i kada prelazi na ostala radna mesta, shodno rasporedu, ne čeka na obradu. Vreme završetka ovog radnog naloga iznosi 17h, kada se završava rad na njemu na radnom mestu RM3.

Radni nalog R2 čeka 17h jer on počinje sa obradom nakon 17h na RM3 od početka cele operacije. Nakon toga, on prelazi na radno mesto RM1 i tu ne čeka na početak obrade. Vreme završetka ovog radnog naloga je 36h, kada se završava rad na njemu na radnom mestu RM1.

Radni nalog R3 čeka ukupno 26h jer on počinje sa obradom nakon 22h na RM2 od početka cele operacije. Nakon toga, on prelazi na radno mesto RM3 gde ne čeka na početak obrade. Na kraju, on prelazi na radno mesto RM1 gde čeka još 4h na početak obrade. Vreme završetka ovog radnog naloga je 38h, kada se završava rad na njemu na radnom mestu RM1.

Radni nalog R4 čeka ukupno 2h. On počinje sa obradom odmah na RM3. Potom on prelazi na radno mesto RM2 gde čeka 2h na početak obrade zbog zauzetosti tog radnog mesta. Na kraju, on prelazi na radno mesto RM1 gde nema čekanja na početak obrade. Vreme završetka ovog radnog naloga je 22h, kada se završava rad na njemu na radnom mestu RM1.

Radni nalog R5 čeka ukupno 6h. On počinje sa obradom nakon 4h na RM1 od početka cele operacije. Nakon toga, on prelazi na radno mesto RM2 gde još čeka 2h na početak obrade zbog zauzetosti tog radnog mesta. Vreme završetka ovog radnog naloga je 22h, kada se završava rad na njemu na radnom mestu RM2.

U tabeli 5.2. prikazana su navedena vremena čekanja radnih naloga, kao i njihove rokove završetaka.

**Tabela 5.2.** Vremena čekanja radnih naloga i njihovi rokovi završetaka

Radni nalog	Čekanje radnih naloga (h)	Rok završetka (h)
R1	0	17
R2	17	36
R3	26	38
R4	2	22
R5	6	22

d)

Sa grafika se vidi da je ukupno vreme završetka svih radnih naloga 38h, a ukupno vreme koje je potrošeno na sva radna mesta 114h (3 radna mesta x 38 h). Kao što je izračunato, ukupno vreme stajanja na svim radnim mestima iznosi 30h, tako da se ukupno vreme rada dobija kada se od ukupnog vremena koje je potrošeno na sva radna mesta oduzme vreme stajanja, odnosno  $114h - 30h = 84h$ .

Shodno tome, stepen iskorišćenja vremena rada iznosi:

$$K_i = \frac{84}{114} = 0,7368, \text{ odnosno } 73,68\%.$$

**Zadatak 5.2.** U jednom proizvodnom pogonu na tri radna mesta sa po jednim tehnološkim sistemom (RM1, RM2, RM3) se izrađuje pet radnih naloga (R1, R2, R3, R4, R5), koje treba vremenski raspodeliti na data radna mesta. Vremena potrebna za izradu svakog radnog naloga na svakom radnom mestu su data u tabeli 5.3.

**Tabela 5.3.** Vremena potrebna za izradu svakog radnog naloga na svakom radnom mestu

Radni nalog	Radno mesto / vreme trajanja operacija (h)	Rok završetka (dan)
R1	RM1/4, RM2/6, RM3/7	3
R2	RM3/11, RM1/8	6
R3	RM2/6, RM3/4, RM1/2	6
R4	RM3/8, RM2/6, RM1/6	6
R5	RM1/10, RM2/6	6

Radni nalozi se terminiraju unapred pri čemu su kapaciteti odgovarajućih tehnoloških sistema ograničeni, a redosled radnih naloga je R2, R1, R4, R5, R3. Efektivno radno vreme iznosi 7h na dan. Koristeći Gantov dijagram uraditi sledeće:

- Terminirati radne naloge na radna mesta,
- Odrediti vremena stajanja na svakom radnom mestu i ukupno vreme stajanja,
- Odrediti vremena čekanja svakog radnog naloga i njihova vremena završetka, i
- Odrediti procenat iskorišćenja vremena rada celog sistema.

Zadatak je isti kao zadatak 5.1., samo je ovde promenjen redosled realizacije radnih naloga.

**Rešenje:****a)**

Pošto se prvi realizuje, radni nalog R2 se terminira na sva tri radna mesta. Prvo se radni nalog R2 izrađuje na radnom mestu RM3 u trajanju od 11 sata, zatim odlazi na radno mesto RM1 gde se obrađuje 8 sata.

Nakon toga se terminira radni nalog R1 na radna mesta RM1, RM2 i RM3 sa vremenima obrade u trajanju od 4h, 6h i 7h respektivno. Obrada radnog naloga R1 može odmah da počne na radnom mestu RM1, obzirom da je dato radno mesto slobodno do vremenskog perioda 11h. Nakon toga, obrada radnog naloga R1 može da krene na radno mesto RM2. Na kraju, radni nalog R1 se može obrađivati na radnom mestu RM3, nakon čekanja od 1h u vremenskom periodu od 11h do 18h.

Naredni se terminira radni nalog R4 na radna mesta RM3, RM2 i RM1 sa vremenima obrade u trajanju od 8h, 6h i 6h respektivno. Obrada radnog naloga R4 se vrši na radnom mestu RM3 u vremenu od 18h do 26h (8h). Nakon toga, obrada R4 može da krene na radno mesto RM2. Na kraju, R4 se može obrađivati na radnom mestu RM1 u vremenskom periodu od 32 h do 38h.

Sledeći se terminira radni nalog R5. On se prvo obrađuje na RM1 u vremenskom periodu 17h do 27h (10h). Nakon toga, R5 se prenosi na radno mesto RM2 koje je zauzeto do vremenskog perioda 32h, tako da se obrada izvodi u periodu od 32h do 38h (6h).

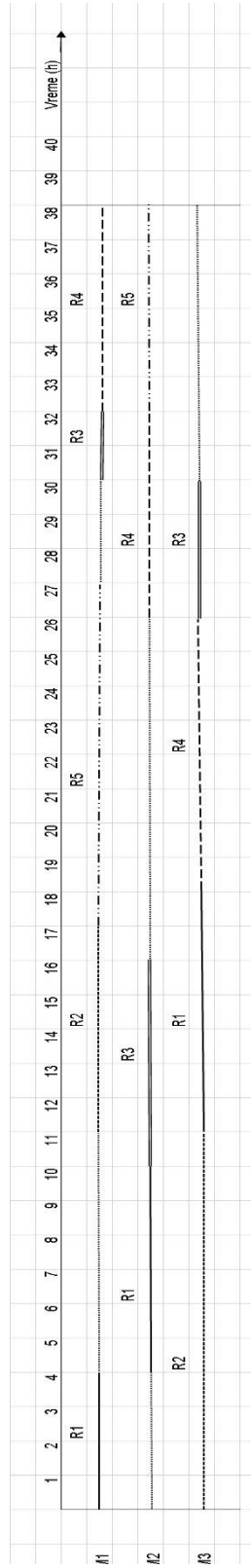
Poslednji se obrađuje radni nalog R3. On se prvo obrađuje na RM2 u vremenskom periodu 10h do 16h (6h). Nakon toga, R3 ide na radno mesto RM3 gde se obrađuje u periodu od 26 do 30 (4h). Na kraju, R3 se prebacuje na radno mesto RM1 gde se obrađuje 2h u vremenskom periodu od 30h do 32h.

Na slici 5.2. prikazan je konačan oblik Gantovog dijagrama.

**b)**

Vremena stajanja na svakom radnom mestu se sabiraju. i na grafiku su ona prikazana pomoću tačkastih linija. Na radnom mestu RM1 stajanje se javlja između vremenskog perioda 4h i 11h (7h), kao i između 27h i 30h (3h). Shodno tome, ukupno vreme stajanja na ovom radnom mestu iznosi 10h. Na radnom mestu RM2 zastoji se javljaju u vremenskim periodima od 0h do 4h (4h) i od 16h do 26h (10h). Ukupno vreme stajanja na ovom radnom mestu iznosi 14h. Na radnom mestu RM3 stajanja se javljaju u vremenskom periodu od 30h do 38h (8h).





Slika 5.2. Gantov dijagram terminiranja radnih mesta radnim nalozima

Ukupno vreme stajanja se dobija sabiranjem svih vremena stajanja, odnosno  $10h+14h+8h = 32h$ .

c)

Radni nalog R1 nema čekanja jer on počinje odmah sa obradom, a kada prelazi na ostala radna mesta, shodno rasporedu, čeka na obradu 1h između radnog mesta RM2 i RM3. Vreme završetka ovog radnog naloga iznosi 18h, kada se završava rad na njemu na radnom mestu RM3.

Radni nalog R2 nema čekanja jer on počinje odmah sa obradom a i kada prelazi na ostala radna mesta, shodno rasporedu, ne čeka na obradu. Vreme završetka ovog radnog naloga je 17h, kada se završava rad na njemu na radnom mestu RM1.

Radni nalog R3 čeka ukupno 20h, jer on počinje sa obradom nakon 10h na RM2 od početka cele operacije. Nakon toga, on prelazi na radno mesto RM3 gde čeka na početak obrade 10h. Na kraju, on prelazi na radno mesto RM1 gde ne čeka na početak obrade. Vreme završetka ovog radnog naloga je 32h, kada se završava rad na njemu na radnom mestu RM1.

Radni nalog R4 čeka ukupno 18h. On počinje sa obradom na RM3 nakon 18h od početka cele operacije. Potom on prelazi na radno mesto RM2, odnosno RM1 gde ne čeka na početak obrade. Vreme završetka ovog radnog naloga je 38h, kada se završava rad na njemu na radnom mestu RM1.

Radni nalog R5 čeka ukupno 22h. On počinje sa obradom nakon 17h na RM1 od početka cele operacije. Nakon toga, on prelazi na radno mesto RM2 gde još čeka 5h na početak obrade zbog zauzetosti tog radnog mesta. Vreme završetka ovog radnog naloga je 38h, kada se završava rad na njemu na radnom mestu RM2.

U tabeli 5.4. prikazana su navedena vremena čekanja radnih naloga, kao i njihove rokove završetaka.

**Tabela 5.4.** Vremena čekanja radnih naloga i njihovi rokovi završetaka

Radni nalog	Čekanje radnih naloga (h)	Rok završetka (h)
R1	1	18
R2	0	17
R3	20	32
R4	18	38
R5	22	38

d)

Sa grafika se vidi da je ukupno vreme završetka svih radnih naloga 38h, a ukupno vreme koje je potrošeno na sva radna mesta 114h (3 radna mesta x 38 h).

Kao što je izračunato, ukupno vreme stajanja na svim radnim mestima iznosi 32h, tako da se ukupno vreme rada dobija kada se od ukupnog vremena koje je potrošeno na sva radna mesta oduzme vreme stajanja, odnosno  $114h - 32h = 82h$ .

Shodno tome, stepen iskorišćenja vremena rada iznosi:

$$K_i = \frac{82}{114} = 0,7193, \text{ odnosno } 71,93\%.$$

**Zadatak 5.3.** U jednom proizvodnom pogonu na četiri radna mesta sa po jednim tehnološkim sistemom (RM1, RM2, RM3, RM4) se izrađuje pet radnih naloga (R1, R2, R3, R4, R5), koje treba vremenski raspodeliti na data radna mesta. Vremena potrebna za izradu svakog radnog naloga na svakom radnom mestu su data u tabeli 5.5.

**Tabela 5.5.** Vremena potrebna za izradu svakog radnog naloga na svakom radnom mestu

Radni nalog	Radno mesto / vreme trajanja operacija (h)	Rok završetka (dan)
R1	RM1/4, RM2/3, RM3/5, RM4/2	2
R2	RM3/4, RM1/1, RM4/3	2
R3	RM4/3, RM2/3, RM3/4, RM1/2	1
R4	RM3/2, RM2/3, RM4/4, RM1/3	2
R5	RM1/5, RM2/3, RM3/2	

Radni nalozi se terminiraju unapred pri čemu su kapaciteti odgovarajućih tehnoloških sistema ograničeni, a redosled radnih naloga je R3, R4, R5, R1, R2. Efektivno radno vreme iznosi 12h na dan. Koristeći Gantov dijagram uraditi sledeće:

- Terminirati radne naloge na radna mesta,
- Odrediti vremena stajanja na svakom radnom mestu i ukupno vreme stajanja,
- Odrediti vremena čekanja svakog radnog naloga i njihova vremena završetka, i
- Odrediti procenat iskorišćenja vremena rada celog sistema.

**Rešenje:****a)**

Prvi po rasporedu se obrađuje radni nalog R3. On se prvo obrađuje na RM4 3h, a zatim ide na radno mesto RM2 gde se obrađuje 3h. Nakon toga, R3 se prebacuje na radno mesto RM3 gde se obrađuje 4h i on se završava na radnom mestu RM1 gde se obrađuje 2h.

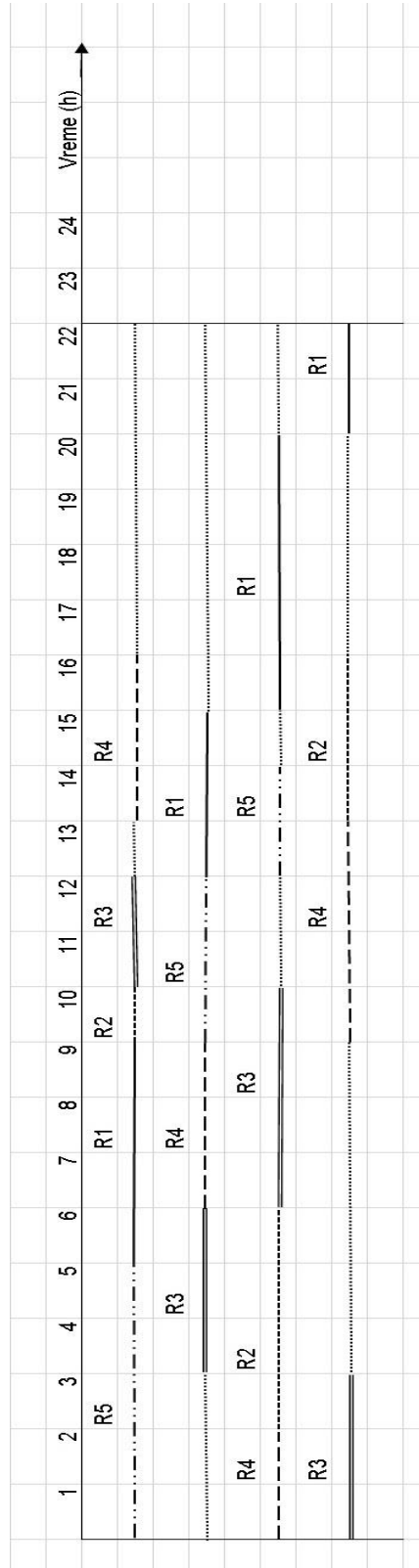
Naredni se terminira radni nalog R4 na radna mesta RM3, RM2, RM4 i RM1 sa vremenima obrade u trajanju od 2h, 3h, 4h i 3h respektivno. Obrada radnog naloga R4 se vrši na radnom mestu RM3 u vremenu od 0h do 2h (2h). Nakon toga, obrada R4 može da krene na radno mesto RM2 u vremenu od 6h do 9h (3h). Radni nalog posle toga, može odmah da ide na obradu na radnom mestu RM4 (4h). Na kraju, R4 se može obrađivati na radnom mestu RM1 u vremenskom periodu od 13h do 16h.

Sledeći se terminira radni nalog R5. On može odmah da se obrađuje na RM1 u vremenskom periodu 0h do 5h (5h). Nakon toga, R5 se prenosi na radno mesto RM2 koje je zauzeto do vremenskog perioda 9h, tako da se obrada izvodi u periodu od 9h do 12h (3h). Na kraju, R5 ide na radno mesto RM3 gde ne čeka na obradu.

Nakon toga se terminira radni nalog R1 na radna mesta RM1, RM2, RM3 i RM4 sa vremenima obrade u trajanju od 4h, 3h, 5h i 2h respektivno. Obrada radnog naloga R1 na radnom mestu RM1 se obavlja u periodu od 5h do 9h (4h). Nakon toga, obrada radnog naloga R1 se vrši na radnom mestu RM2 u periodu od 12h do 15h (3h). Potom, radni nalog R1 se može odmah obrađivati na radnom mestu RM3. Na kraju, radni nalog R1 ide na obradu na radnom mestu R4 bez čekanja.

Pošto se poslednji realizuje, radni nalog R2 se terminira na sva tri radna mesta. Prvo se radni nalog R2 izrađuje na radnom mestu RM3 u trajanju od 4 sata u periodu od 2h do 6h, zatim odlazi na radno mesto RM1 gde se obrađuje 1h (od 9h do 10h). Na kraju radni nalog R2 odlazi na radno mesto RM4 gde čeka 3h na početak obrade i gde se obrađuje u periodu od 13h do 16h (3h).

Konačan oblik Gantovog dijagrama je prikazan na slici 5.3.



Slika 5.3. Gantov dijagram terminiranja radnih mesta radnim nalozima

b)

Vremena stajanja na svakom radnom mestu se sabiraju, i na grafiku su ona prikazana pomoću tačkastih linija. Na radnom mestu RM1 stajanje se javlja između vremenskog perioda 12h i 13h (1h), kao i između 16h i 22h (6h). Shodno tome, ukupno vreme stajanja na ovom radnom mestu iznosi 7h. Na radnom mestu RM2 zastoji se javljaju u vremenskim periodima od 0h do 3h (3h) i od 15h do 22h (7h). Ukupno vreme stajanja na ovom radnom mestu iznosi 10h. Na radnom mestu RM3 stajanja se javljaju u vremenskom periodu od 10h do 12h (2h), zatim od 14h do 15h (1h) i od 20h do 22h (2h). Ukupno vreme stajanja na radnom mestu RM3 iznosi 5h. Na radnom mestu RM4 zastoji se javljaju u vremenskim periodima od 3h do 9h (6h) i od 16h do 20h (4h). Ukupno vreme stajanja na ovom radnom mestu iznosi 10h.

Ukupno vreme stajanja se dobija sabiranjem svih vremena stajanja, odnosno  $7h+10h+5h+10h = 32h$ .

c)

Radni nalog R1 počinje sa obradom nakon 5h čekanja, a kada prelazi na ostala radna mesta, shodno rasporedu, čeka još 3h na obradu između radnog mesta RM1 i RM2. Ukupno vreme čekanja ovog radnog naloga iznosi 8h. Vreme završetka ovog radnog naloga iznosi 22h, kada se završava rad na njemu na radnom mestu RM4.

Radni nalog R2 čeka ukupno 8h. On čeka 2h od početka operacije na prvu obradu na radnom mestu RM3. Kada prelazi na ostala radna mesta, shodno rasporedu, čeka prvo 3h na obradu između RM3 i RM1, a onda još 3h između radnih mesta RM1 i RM4. Vreme završetka ovog radnog naloga je 16h, kada se završava rad na njemu na radnom mestu RM4.

Radni nalog R3 ne čeka na obradu, jer se on prvi realizuje. Vreme završetka ovog radnog naloga je 12h, kada se završava rad na njemu na radnom mestu RM1.

Radni nalog R4 čeka ukupno 4h. On odmah počinje sa obradom na RM3, a jedino čekanje ima kada sa tog radnog mesta prelazi na radno mesto RM2 (4h). Vreme završetka ovog radnog naloga je 16h, kada se završava rad na njemu na radnom mestu RM1.

Radni nalog R5 čeka ukupno 4h. On počinje odmah sa obradom. Jedino čekanje se javlja kada R5 čeka ispred RM2 (4h) nakon završetka obrade na RM1. Vreme završetka ovog radnog naloga je 14h, kada se završava rad na njemu na radnom mestu RM3.

U tabeli 5.6. prikazana su navedena vremena čekanja radnih naloga, kao i njihove rokove završetaka.

**Tabela 5.6.** Vremena čekanja radnih naloga i njihovi rokovi završetaka

Radni nalog	Čekanje radnih naloga (h)	Rok završetka (h)
R1	8	22
R2	8	16
R3	0	12
R4	4	16
R5	4	14

d)

Sa grafika se vidi da je ukupno vreme završetka svih radnih naloga 22h, a ukupno vreme koje je potrošeno na sva radna mesta 88h (4 radna mesta x 22 h).

Kao što je izračunato, ukupno vreme stajanja na svim radnim mestima iznosi 32h, tako da se ukupno vreme rada dobija kada se od ukupnog vremena koje je potrošeno na sva radna mesta oduzme vreme stajanja, odnosno  $88h - 32h = 56h$ .

Shodno tome, stepen iskorišćenja vremena rada iznosi:

$$K_i = \frac{56}{88} = 0,6364, \text{ odnosno } 63,64\%.$$

**Zadatak 5.4.** U jednom proizvodnom pogonu na četiri radna mesta sa po jednim tehnološkim sistemom (RM1, RM2, RM3, RM4) se izrađuje tri radnih naloga (R1, R2, R3), koje treba vremenski raspodeliti na data radna mesta. Vremena potrebna za izradu svakog radnog naloga na svakom radnom mestu su data u tabeli 5.7.

**Tabela 5.7.** Vremena potrebna za izradu svakog radnog naloga na svakom radnom mestu

Radni nalog	Radno mesto / vreme trajanja operacija (h)	Rok završetka (dan)
R1	RM1/3, RM4/3, RM3/4, RM2/2	2
R2	RM2/4, RM3/5, RM4/4, RM1/3	2
R3	RM3/3, RM2/4, RM1/4, RM4/2	2

Radni nalozi se terminiraju unapred pri čemu su kapaciteti odgovarajućih tehnoloških sistema ograničeni. Efektivno radno vreme iznosi 10h na dan.

Koristeći Gantov dijagram uraditi sledeće:

- a) Terminirati radne naloge na radna mesta za sve varijante redosleda realizacije radnih naloga,
- b) Odrediti vremena stajanja na svakom radnom mestu i ukupno vreme stajanja za sve varijante redosleda realizacije radnih naloga,
- c) Odrediti vremena čekanja svakog radnog naloga i njihova vremena završetka za sve varijante redosleda realizacije radnih naloga,
- d) Odrediti procenat iskorišćenja vremena rada celog sistema za sve varijante redosleda realizacije radnih naloga, i
- e) Odrediti najbolju varijantu redosleda radnih naloga.

**Rešenje:**

**a)**

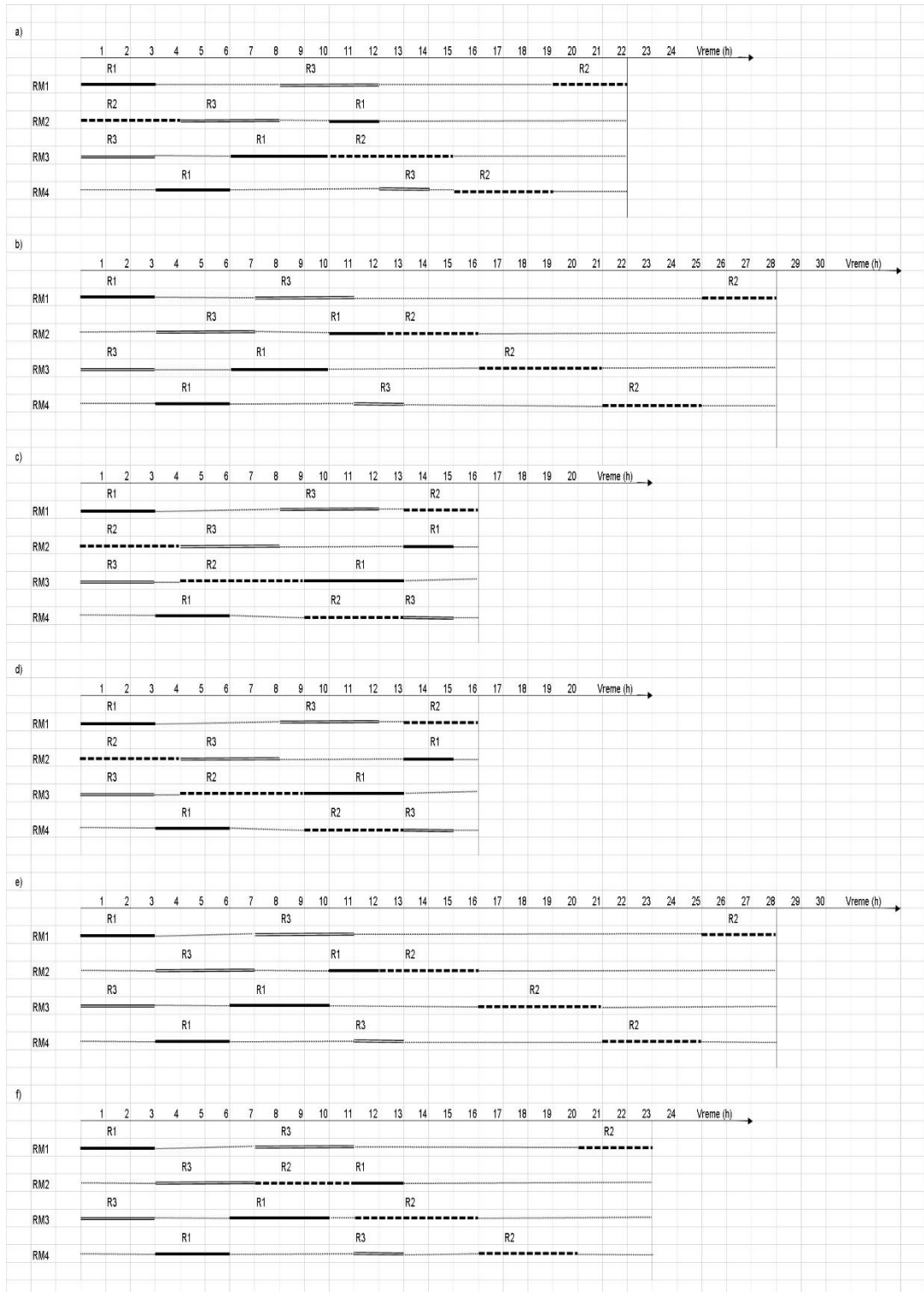
Pošto ima tri radna naloga (R1, R2 i R3), postoji šest varijante redosleda njihove realizacije:

- R1→R2→R3 (varijanta 1),
- R1→R3→R2 (varijanta 2),
- R2→R1→R3 (varijanta 3),
- R2→R3→R1 (varijanta 4),
- R3→R1→R2 (varijanta 5), i
- R3→R2→R1 (varijanta 6).

Terminiranje radnih naloga na radna mesta vrši se na osnovu tabele 5.7. Postupak je potpuno isti kao i kod prethodnih primera. Na slici 5.4. prikazani su konačni oblici Gantovog dijagrama za sve varijante redosleda realizacije radnih naloga.

Na osnovu slike 5.4. vidi se da najkraće vreme realizacije imaju varijante 3 (R2→R1→R3) i 4 (R2→R3→R1) – 16h, a najduže vreme realizacije imaju varijante 2 (R1→R3→R2) i 5 (R3→R1→R2) – 28h. Varijanta 1 (R1→R2→R3) ima ukupno vreme realizacije od 22h, a varijanta 6 (R3→R2→R1) 23h.





**Slika 5.4.** Gantov dijagram terminiranja radnih mesta radnim nalogima. a) Varijanta 1. b) Varijanta 2. c) Varijanta 3. d) Varijanta 4. e) Varijanta 5. f) Varijanta 6.

b)

Vremena stajanja na svakom radnom mestu i ukupna vremena stajanja iznose za:

– Varijantu 1

Na radnom mestu RM1 ukupno stajanje iznosi 12h. Na radnom mestu RM2 ukupno stajanje iznosi 12h. Na radnom mestu RM3 ukupno stajanje iznosi 10h. Na radnom mestu RM4 ukupno stajanje iznosi 13h.

Ukupno vreme stajanja se dobija sabiranjem svih vremena stajanja, odnosno  $12h+12h+10h+13h = 47h$ .

– Varijantu 2

Na radnom mestu RM1 ukupno stajanje iznosi 18h. Na radnom mestu RM2 ukupno stajanje iznosi 18h. Na radnom mestu RM3 ukupno stajanje iznosi 16h. Na radnom mestu RM4 ukupno stajanje iznosi 19h.

Ukupno vreme stajanja se dobija sabiranjem svih vremena stajanja, odnosno  $18h+18h+16h+19h = 71h$ .

– Varijantu 3

Na radnom mestu RM1 ukupno stajanje iznosi 6h. Na radnom mestu RM2 ukupno stajanje iznosi 6h. Na radnom mestu RM3 ukupno stajanje iznosi 4h. Na radnom mestu RM4 ukupno stajanje iznosi 7h.

Ukupno vreme stajanja se dobija sabiranjem svih vremena stajanja, odnosno  $6h+6h+4h+7h = 23h$ .

– Varijantu 4

Na radnom mestu RM1 ukupno stajanje iznosi 6h. Na radnom mestu RM2 ukupno stajanje iznosi 6h. Na radnom mestu RM3 ukupno stajanje iznosi 4h. Na radnom mestu RM4 ukupno stajanje iznosi 7h.

Ukupno vreme stajanja se dobija sabiranjem svih vremena stajanja, odnosno  $6h+6h+4h+7h = 23h$ .

– Varijantu 5

Na radnom mestu RM1 ukupno stajanje iznosi 18h. Na radnom mestu RM2 ukupno stajanje iznosi 18h. Na radnom mestu RM3 ukupno stajanje iznosi 16h. Na radnom mestu RM4 ukupno stajanje iznosi 19h.

Ukupno vreme stajanja se dobija sabiranjem svih vremena stajanja, odnosno  $18h+18h+16h+19h = 71h$ .

## – Varijantu 6

Na radnom mestu RM1 ukupno stajanje iznosi 13h. Na radnom mestu RM2 ukupno stajanje iznosi 13h. Na radnom mestu RM3 ukupno stajanje iznosi 11h. Na radnom mestu RM4 ukupno stajanje iznosi 14h.

Ukupno vreme stajanja se dobija sabiranjem svih vremena stajanja, odnosno  $13h+13h+11h+14h = 51h$ .

c)

**Tabela 5.8.** Vremena čekanja radnih naloga i njihovi rokovi završetaka

Radni nalog	Čekanje radnih naloga (h)	Rok završetka (h)
Varijanta 1 (R1→R2→R3)		
R1	0	12
R2	6	22
R3	1	14
Varijanta 2 (R1→R3→R2)		
R1	0	12
R2	12	28
R3	0	13
Varijanta 3 (R2→R1→R3)		
R1	3	15
R2	0	16
R3	2	15
Varijanta 4 (R2→R3→R1)		
R1	3	15
R2	0	16
R3	2	15
Varijanta 5 (R3→R1→R2)		
R1	0	12
R2	12	28
R3	0	13
Varijanta 6 (R3→R2→R1)		
R1	1	13
R2	7	23
R3	0	13

Vremena čekanja svakog radnog naloga i njihova vremena završetka za sve varijante redosleda realizacije radnih naloga su data u tabeli 5.8.

*d)*

Procenat iskorišćenja vremena rada celog sistema iznosi za:

– Varijantu 1

Ukupno vreme završetka svih radnih naloga iznosi 22h, a ukupno vreme koje je potrošeno na sva radna mesta 88h (4 radna mesta x 22 h).

Ukupno vreme stajanja na svim radnim mestima iznosi 47h. Ukupno vreme rada iznosi  $88h - 47h = 41h$ .

Shodno tome, stepen iskorišćenja vremena rada iznosi:

$$K_i = \frac{41}{88} = 0,4659, \text{ odnosno } 46,59\%.$$

– Varijantu 2

Ukupno vreme završetka svih radnih naloga iznosi 28h, a ukupno vreme koje je potrošeno na sva radna mesta 112h (4 radna mesta x 28h).

Ukupno vreme stajanja na svim radnim mestima iznosi 71h. Ukupno vreme rada iznosi  $112h - 71h = 41h$ .

Shodno tome, stepen iskorišćenja vremena rada iznosi:

$$K_i = \frac{41}{112} = 0,3661, \text{ odnosno } 36,61\%.$$

– Varijantu 3

Ukupno vreme završetka svih radnih naloga iznosi 16h, a ukupno vreme koje je potrošeno na sva radna mesta 64h (4 radna mesta x 16h).

Ukupno vreme stajanja na svim radnim mestima iznosi 23h. Ukupno vreme rada iznosi  $64h - 23h = 41h$ .

Shodno tome, stepen iskorišćenja vremena rada iznosi:

$$K_i = \frac{41}{64} = 0,6406, \text{ odnosno } 64,06\%.$$

– Varijantu 4

Ukupno vreme završetka svih radnih naloga iznosi 16h, a ukupno vreme koje je potrošeno na sva radna mesta 64h (4 radna mesta x 16h).

Ukupno vreme stajanja na svim radnim mestima iznosi 23h. Ukupno vreme rada iznosi  $64h - 23h = 41h$ .

Shodno tome, stepen iskorišćenja vremena rada iznosi:

$$K_i = \frac{41}{64} = 0,6406, \text{ odnosno } 64,06\%.$$

– Varijantu 5

Ukupno vreme završetka svih radnih naloga iznosi 28h, a ukupno vreme koje je potrošeno na sva radna mesta 112h (4 radna mesta x 28h).

Ukupno vreme stajanja na svim radnim mestima iznosi 71h. Ukupno vreme rada iznosi  $112h - 71h = 41h$ .

Shodno tome, stepen iskorišćenja vremena rada iznosi:

$$K_i = \frac{41}{112} = 0,3661, \text{ odnosno } 36,61\%.$$

– Varijantu 6

Ukupno vreme završetka svih radnih naloga iznosi 23h, a ukupno vreme koje je potrošeno na sva radna mesta 92h (4 radna mesta x 23h).

Ukupno vreme stajanja na svim radnim mestima iznosi 71h. Ukupno vreme rada iznosi  $92h - 51h = 41h$ .

Shodno tome, stepen iskorišćenja vremena rada iznosi:

$$K_i = \frac{41}{92} = 0,4457, \text{ odnosno } 44,57\%.$$

e)

Na osnovu prethodnih rešenja vidi se da su najbolje dve varijante – R2→R1→R3 (varijanta 3) i R2→R3→R1 (varijanta 4). Ove varijante imaju najkraće vreme realizacije cele operacije i najveće iskorišćenje vremena rada. Iako se kod njih razlikuju redosledi realizacije radnih naloga, njihova realizacija je identična. Na osnovu toga, može se zaključiti da se treba opredeliti za bilo koju od navedenih varijanti realizacije redosleda radnih naloga.

### 5.3. PROBLEM TERMINIRANJA $m \times n$

**Zadatak 5.5.** U jednom proizvodnom pogonu na dva tehnološka sistema (T1, T2) se izrađuje pet radnih naloga (RN1, RN2, RN3, RN4, RN5), koje treba vremenski raspodeliti na data radna mesta. Svi radni nalozi se prvo izrađuju na tehnološkom sistemu T1, a zatim na tehnološkom sistemu T2. Vremena potrebna za izradu svakog radnog naloga na svakom tehnološkom sistemu su data u tabeli 5.9.

**Tabela 5.9.** Vremena potrebna za izradu radnih naloga

Radni nalog	Vreme izrade (h)	
	Tehnološki sistem T1	Tehnološki sistem T2
RN1	4	2
RN2	6	8
RN3	7	4
RN4	9	7
RN5	7	9

Uraditi sledeće:

- Terminirati radne naloge metodom  $m \times n$  ( $m = 2$ ,  $n = 5$ ),
- Konstruisati Gantov dijagram i izračunati ukupno vreme izrade.

**Rešenje:**

*a)*

Prvo treba pronaći najkraće vreme izrade. U tabeli 5.9. se vidi da je najkraće vreme 2h za radni nalog RN1 na tehnološkom sistemu T2 (desna kolona). Obzirom da se dato vreme nalazi u desnoj koloni, radni nalog RN1 se stavlja kao prvi u redosledu ali sa desne strane – slika 5.5 a). U daljem postupku se radni nalog RN1 više ne razmatra.

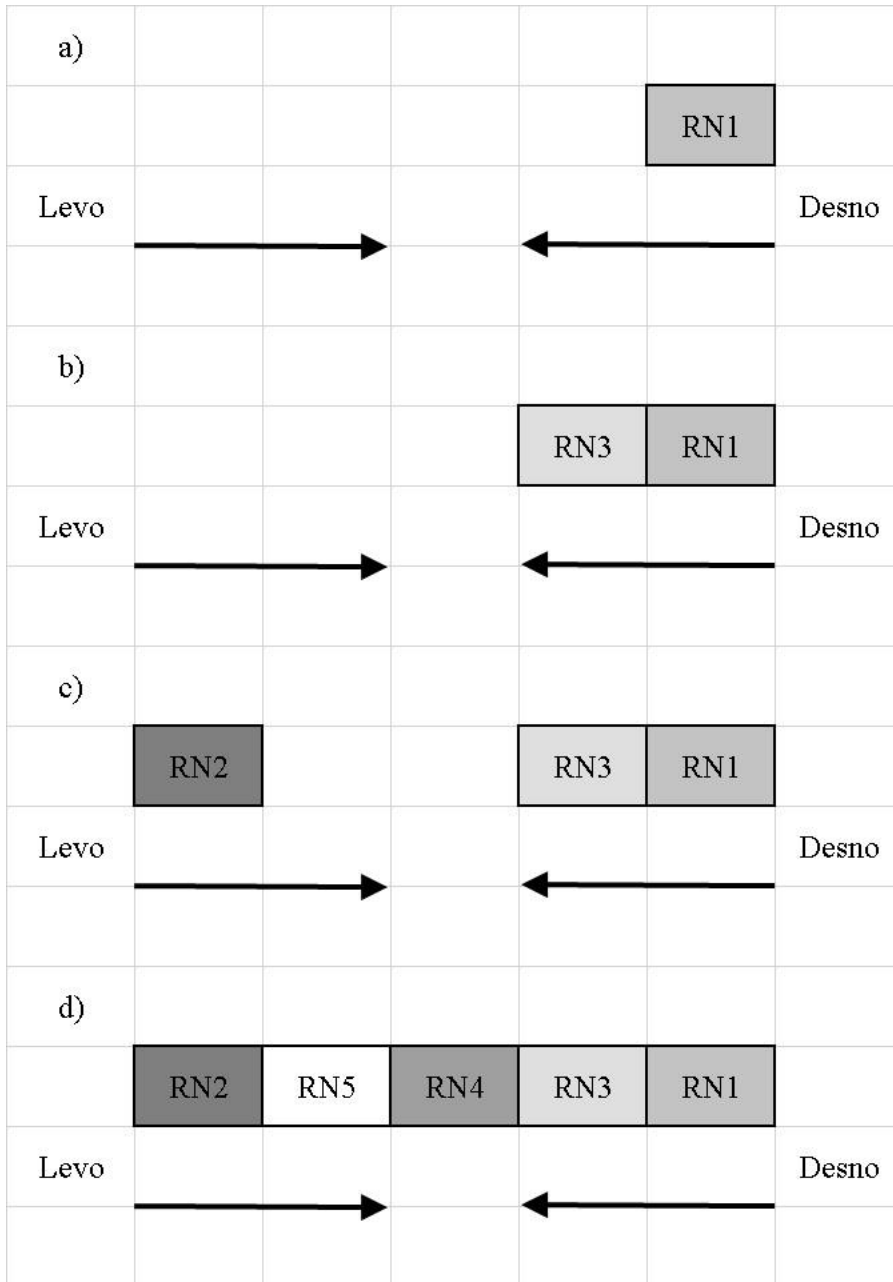
Sledeće najkraće vreme je 4 sata, takođe s desne strane (T2) i to za radni nalog RN3. Shodno tome, on se postavlja u redosled s desne strane ispred radnog naloga RN1 (slika 5.5. b)).

Sledeće najkraće vreme je 6 sata za radni nalog RN2 koje se nalazi sa leve strane (T1), tako da se ovaj radni nalog postavlja kao prvi u redosledu sa leve strane – slika 5.5.c).

Sledeći su radni nalozi RN4 koji se postavlja u redosled sa desne strane, pošto mu je karće vreme realizacije na tehnološkom sistemu T2 (7h) i RN5 koji se postavlja

u redosled sa leve strane prema najkraćem vremenu (7h na na tehnološkom sistemu T1) – slika 5.5 d).

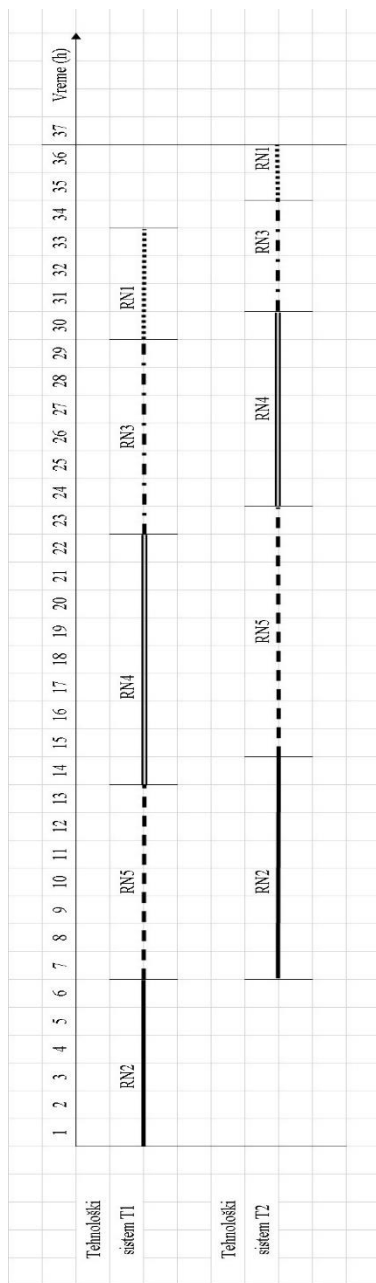
Dobijeni redosled RN2, RN5, RN4, RN3, RN1 je optimalno rešenje koje daje najkraće ukupno vreme izrade i minimalno čekanje tehnoloških sistema na početak izrade.



Slika 5.5. Dijagram optimalnog redosleda realizacije radnih naloga

b)

Gantov dijagram se formira za dobijeni redosled radnih naloga – slika 5.6. Sa dijagrama se vidi da je ukupno vreme izrade 36h. Gantov dijagram se konstruiše tako što se za i za prvi i drugi tehnološki sistem unosi dobijeni redosled radnih naloga sa odgovarajućim vremenima izrade prema tabeli 5.9.



Slika 5.6. Gantov dijagram optimalnog redosleda realizacije radnih naloga



**Zadatak 5.6.** U jednom proizvodnom pogonu na dva tehnološka sistema (T1, T2) se izrađuje četiri radnih naloga (RN1, RN2, RN3, RN4), koje treba vremenski raspodeliti na data radna mesta. Svi radni nalozi se prvo izrađuju na tehnološkom sistemu T1, a zatim na tehnološkom sistemu T2. Vremena potrebna za izradu svakog radnog naloga na svakom tehnološkom sistemu su data u tabeli 5.10.

**Tabela 5.10.** Vremena potrebna za izradu radnih naloga

Radni nalog	Vreme izrade (h)	
	Tehnološki sistem T1	Tehnološki sistem T2
RN1	5	3
RN2	4	2
RN3	1	6
RN4	3	4

Uraditi sledeće:

- Terminirati radne naloge metodom  $m \times n$  ( $m = 2, n = 4$ ),
- Konstruisati Gantov dijagram i izračunati ukupno vreme izrade.

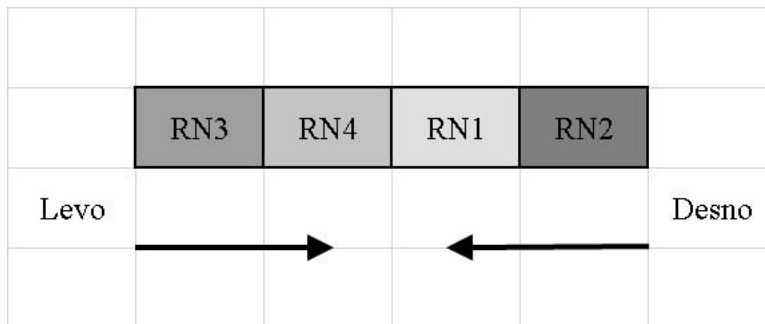
### Rešenje:

Polazi se od najkraćeg vremena izrade. U tabeli 5.10. se vidi da je najkraće vreme 1h za radni nalog RN3 na tehnološkom sistemu T1 (leva kolona). Obzirom da se dato vreme nalazi u levoj koloni, radni nalog RN3 se stavlja kao prvi u redosledu sa leve strane. U daljem postupku se radni nalog RN3 više ne razmatra.

Sledeće najkraće vreme je 2 sata sa desne strane (T2) i to za radni nalog RN2. Shodno tome, on se postavlja u redosledu prvi s desne strane.

Sledeća najkraća vremena iznose 3 sata i to za radne naloge RN1, koji se nalazi sa desne strane (T2) i RN4, koji se nalazi sa leve strane (T1). Oni se, shodno tome postavljaju na odgovarajuća mesta na dijagramu (RN1 sa desne, a RN4 sa leve strane).

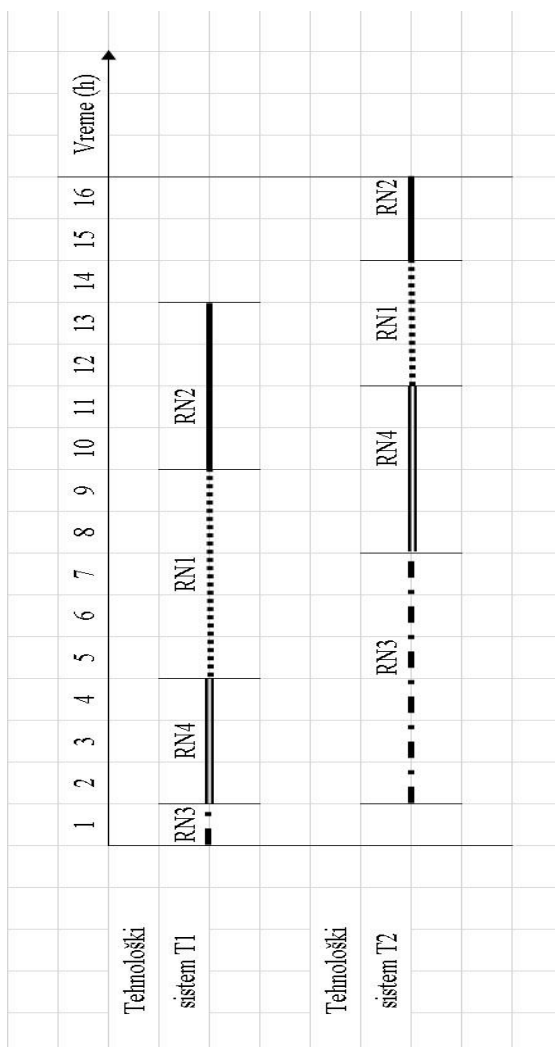
Dobijeni redosled RN3, RN4, RN1, RN2 je optimalno rešenje koje daje najkraće ukupno vreme izrade i minimalno čekanje tehnoloških sistema na početak izrade – slika 5.7.



Slika 5.7. Dijagram optimalnog redosleda realizacije radnih naloga

b)

Gantov dijagram se formira za dobijeni redosled radnih naloga – slika 5.8. Sa dijagrama se vidi da je ukupno vreme izrade 16h.



Slika 5.8. Gantov dijagram optimalnog redosleda realizacije radnih naloga

**Zadatak 5.7.** U jednom proizvodnom pogonu na dva tehnološka sistema (T1, T2) se izrađuje pet radnih naloga (RN1, RN2, RN3, RN4, RN5), koje treba vremenski raspodeliti na data radna mesta. Vremena potrebna za izradu svakog radnog naloga na svakom tehnološkom sistemu su data u tabeli 5.11.

**Tabela 5.11.** Vremena potrebna za izradu radnih naloga

Radni nalog	Vreme izrade (h)	
	Tehnološki sistem T1	Tehnološki sistem T2
RN1	2	3
RN2	4	1
RN3	3	5
RN4	4	6
RN5	6	6

Uraditi sledeće:

- Terminirati radne naloge metodom  $m \times n$  ( $m=2$ ,  $n=5$ ),
- Konstruisati Gantov dijagram i izračunati ukupno vreme izrade za slučaj da se svi radni nalozi prvo izrađuju na tehnološkom sistemu T2, a zatim na tehnološkom sistemu T1 (varijanta 1),
- Konstruisati Gantov dijagram i izračunati ukupno vreme izrade za slučaj da se svi radni nalozi prvo izrađuju na tehnološkom sistemu T1, a zatim na tehnološkom sistemu T2 (varijanta 2),
- Odrediti vremena stajanja na svakom tehnološkom sistemu i ukupno vreme stajanja za obe varijante redosleda realizacije radnih naloga,
- Odrediti vremena čekanja svakog radnog naloga i njihova vremena završetka za obe varijante redosleda realizacije radnih naloga,
- Odrediti procenat iskorišćenja vremena rada celog sistema za obe varijante redosleda realizacije radnih naloga, i
- Odrediti bolju varijantu redosleda izrade radnih naloga na tehnološkim sistemima.

**Rešenje:**

Polazi se od najkraćeg vremena izrade. U tabeli 5.11. se vidi da je najkraće vreme 1h za radni nalog RN2 na tehnološkom sistemu T2 (desna kolona). Shodno tome, radni nalog RN2 se stavlja kao prvi u redosledu sa desne strane.

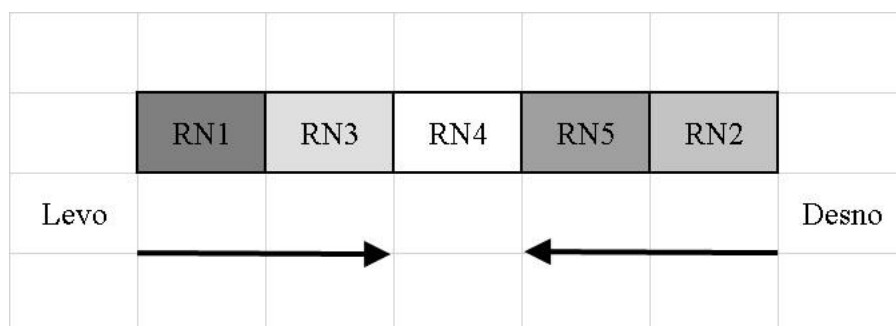
Sledeće najkraće vreme je 2 sata sa leve strane (T1) i to za radni nalog RN1. U skladu sa tim, on se postavlja u redosledu prvi s leve strane.

Sledeća najkraće vreme iznosi 3 sata i to za radni nalog RN3, koje se nalazi sa leve strane (T1). On se, shodno tome postavlja sa leve strane, posle radnog naloga RN1.

Nakon razmatranja prethodna tri radna naloga, najkraće vreme iznosi 4 sata i to za radni nalog RN4, koje se nalazi sa leve strane (T1). On se, u skladu sa tim, postavlja sa leve strane, posle radnog naloga RN3.

Na kraju je ostao radni nalog RN5, koji se postavlja na prazno mesto između radnih naloga RN4 i RN2.

Dobijeni redosled RN1, RN3, RN4, RN5, RN2 je optimalno rešenje koje daje najkraće ukupno vreme izrade i minimalno čekanje tehnoloških sistema na početak izrade – slika 5.9.



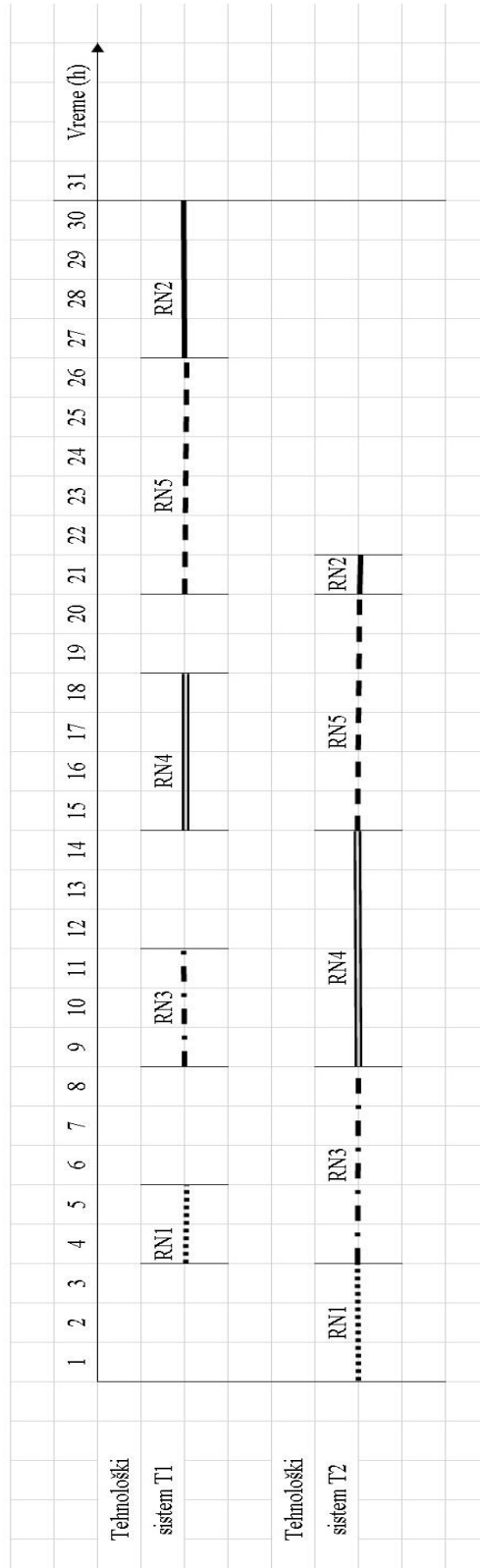
**Slika 5.9.** Dijagram optimalnog redosleda realizacije radnih naloga

**b)**

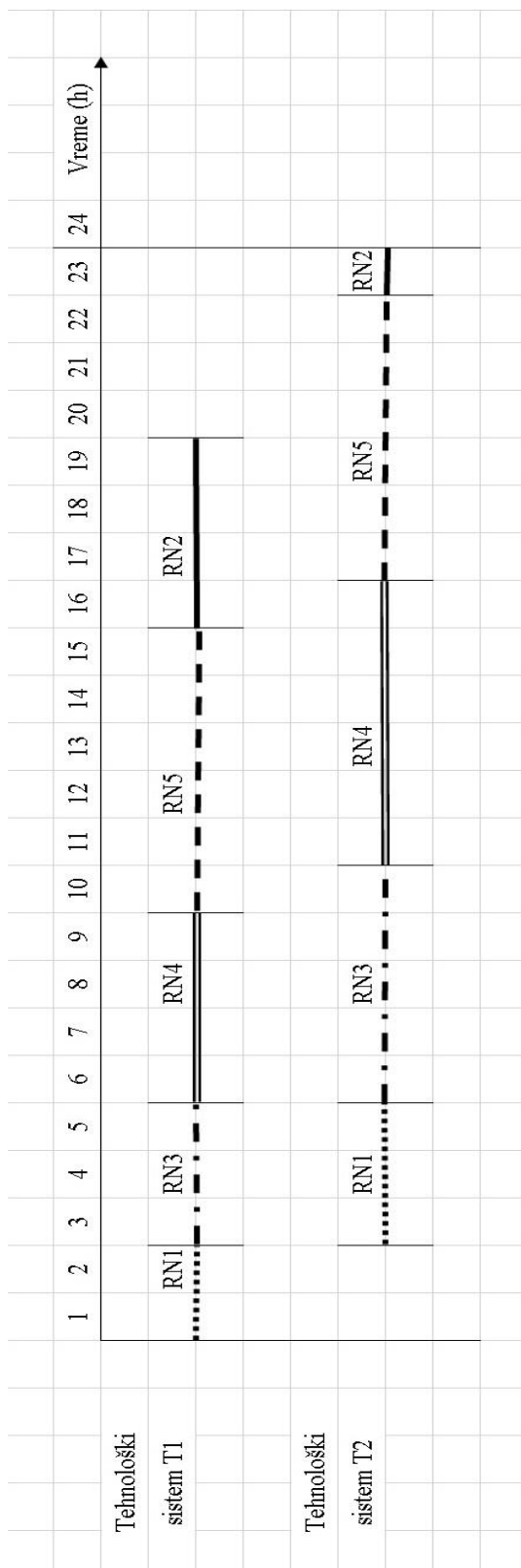
Gantov dijagram se formira za dobijeni redosled radnih naloga – slika 5.10. Pošto se svi radni nalozi prvo izrađuju na tehnološkom sistemu T2, a zatim na tehnološkom sistemu T1, to je prikazano da Gantovom dijagramu. Sa dijagrama se vidi da je ukupno vreme izrade 30h.

**c)**

Gantov dijagram se formira za dobijeni redosled radnih naloga – slika 5.11., shodno zahtevu da se svi radni nalozi prvo izrađuju na tehnološkom sistemu T1, a zatim na tehnološkom sistemu T2. Sa dijagrama se vidi da je ukupno vreme izrade 23h.



Slika 5.10. Gantov dijagram optimalnog redosleda realizacije radnih naloga, pri čemu se radni nalozi prvo izrađuju na tehnološkom sistemu T2, a onda na tehnološkom sistemu T1



Slika 5.11. Gantov dijagram optimalnog redosleda realizacije radnih naloga, pri čemu se radni nalozi prvo izrađuju na tehnološkom sistemu T1, a onda na tehnološkom sistemu T2

d)

Vremena stajanja na svakom tehnološkom sistemu i ukupna vremena stajanja iznose za:

– Varijantu 1

Na tehnološkom sistemu T1 stajanje se javlja između vremenskog perioda 0h i 3h (3h), zatim između 5h i 8h (3h), kao i između 11h i 14h (3h) i 18h i 20h (2h). Shodno tome, ukupno vreme stajanja na ovom tehnološkom sistemu iznosi 11h. Na tehnološkom sistemu T2 zastoj se javlja u vremenskom periodu od 21h do 30h (9h). Ukupno vreme stajanja na ovom tehnološkom sistemu iznosi 7h.

Ukupno vreme stajanja kod ove varijante se dobija sabiranjem svih vremena stajanja, odnosno  $11h+9h = 20h$ .

– Varijantu 2

Na tehnološkom sistemu T1 stajanje se javlja između vremenskog perioda 19h i 23h (4h). Shodno tome, ukupno vreme stajanja na ovom tehnološkom sistemu iznosi 4h. Na tehnološkom sistemu T2 zastoj se javlja u vremenskom periodu od 0h do 2h (2h). Ukupno vreme stajanja na ovom tehnološkom sistemu iznosi 2h.

Ukupno vreme stajanja kod ove varijante se dobija sabiranjem svih vremena stajanja, odnosno  $4h+2h = 6h$ .

e)

Vremena čekanja svakog radnog naloga i njihova vremena završetka iznose za:

– Varijantu 1

Radni nalog RN1 počinje sa obradom odmah na tehnološkom sistemu T2, a kada prelazi na tehnološki sistem T1 ne čeka na obradu. Ukupno vreme čekanja ovog radnog naloga iznosi 0h. Vreme završetka ovog radnog naloga iznosi 5h, kada se završava rad na njemu na tehnološkom sistemu T1.

Radni nalog RN2 čeka ukupno 25h. On čeka 20h od početka operacije na prvu obradu na tehnološkom sistemu T2. Kada prelazi na tehnološki sistem T1, shodno rasporedu, čeka još 5h na obradu. Vreme završetka ovog radnog naloga je 30h, kada se završava rad na njemu na tehnološkom sistemu T1.

Radni nalog RN3 čeka 3h na obradu na tehnološkom sistemu T2. Kada prelazi na obradu na tehnološki sistem T1 ne čeka. Vreme završetka ovog radnog naloga je 11h.

Radni nalog RN4 čeka ukupno 8h. To je vreme koje on čeka da počne obrada na tehnološkom sistemu T2. Vreme završetka ovog radnog naloga je 18h.

Radni nalog R5 čeka ukupno 14h. To je, takođe vreme koje on čeka da počne obrada na tehnološkom sistemu T2. Vreme završetka ovog radnog naloga je 25h.

– Varijantu 2

Radni nalog RN1 počinje sa obradom odmah na tehnološkom sistemu T1, a kada prelazi na tehnološki sistem T2 ne čeka na obradu. Ukupno vreme čekanja ovog radnog naloga iznosi 0h. Vreme završetka ovog radnog naloga iznosi 5h, kada se završava rad na njemu na tehnološkom sistemu T2.

Radni nalog RN2 čeka ukupno 18h. On čeka 15h od početka operacije na prvu obradu na tehnološkom sistemu T1. Kada prelazi na tehnološki sistem T2 čeka još 3h na obradu. Vreme završetka ovog radnog naloga je 23h, kada se završava rad na njemu na tehnološkom sistemu T2.

Radni nalog RN3 čeka 2h na obradu na tehnološkom sistemu T1. Kada prelazi na obradu na tehnološki sistem T2 ne čeka. Vreme završetka ovog radnog naloga je 10h.

Radni nalog RN4 čeka ukupno 6h. On čeka 5h da počne obrada na tehnološkom sistemu T1, plus 1h kada pređe na tehnološki sistem T2. Vreme završetka ovog radnog naloga je 16h.

Radni nalog R5 čeka ukupno 10h. On, takođe čeka da 9h da počne obrada na tehnološkom sistemu T1 i još 1h kada pređe na tehnološki sistem T2. Vreme završetka ovog radnog naloga je 22h.

U tabeli 5.12. prikazana su navedena vremena čekanja radnih naloga, kao i njihove rokove završetaka za obe varijante.



**Tabela 5.12.** Vremena čekanja radnih naloga i njihovi rokovi završetaka

Radni nalog	Čekanje radnih naloga (h)	Rok završetka (h)
Varijanta 1		
R1	0	5
R2	25	30
R3	3	11
R4	8	18
R5	14	
Varijanta 2		
R1	0	5
R2	18	23
R3	2	10
R4	6	16
R5	10	22

f)

Procenat iskorišćenja vremena rada celog sistema iznosi za:

– Varijantu 1

Sa grafika (slika 5.10.) se vidi da je ukupno vreme završetka svih radnih naloga 30h, a ukupno vreme koje je potrošeno na sva radna mesta 60h (2 tehnološka sistema x 30 h).

Kao što je izračunato, ukupno vreme stajanja na svim radnim mestima iznosi 20h, tako da se ukupno vreme rada dobija kada se od ukupnog vremena koje je potrošeno na sva radna mesta oduzme vreme stajanja, odnosno  $60h - 20h = 40h$ .

Shodno tome, stepen iskorišćenja vremena rada iznosi:

$$K_i = \frac{40}{60} = 0,6667, \text{ odnosno } 66,67\%.$$

– Varijantu 2

Sa grafika (slika 5.11.) se vidi da je ukupno vreme završetka svih radnih naloga 23h, a ukupno vreme koje je potrošeno na sva radna mesta 46h (2 tehnološka sistema x 23 h).

Kao što je izračunato, ukupno vreme stajanja na svim radnim mestima iznosi 6h, tako da se ukupno vreme rada dobija kada se od ukupnog vremena koje je potrošeno na sva radna mesta oduzme vreme stajanja, odnosno  $46h - 6h = 40h$ .

Shodno tome, stepen iskorišćenja vremena rada iznosi:

$$K_i = \frac{40}{46} = 0,8696, \text{ odnosno } 86,96\%.$$

**g)**

Na osnovu prethodnih rešenja vidi se da je bolja varijanta 2 (prvo se obrada vrši na tehnološkom sistemu T1, a onda na tehnološkom sistemu T2). Ova varijanta ima kraće vreme realizacije cele operacije i najveće iskorišćenje vremena rada. Na osnovu toga, može se zaključiti da se treba opredeliti za ovu varijanti realizacije redosleda radnih naloga.

## 6. ANALIZA IZLAZNIH VELIČINA

### 6.1. TEORIJSKI UVOD

Analiza izlaznih veličina se vrši u cilju ocene uspešnosti realizacije procesa rada. U zavisnosti od rezultata, donosi se odluka da li da počne ili ne proces oblikovanja podloga za projektovanje postupaka podešavanja procesa rada.

Postoji veći broj izlaznih veličina koje pokazuju rezultat procesa rada, a u narednom tekstu akcenat je dat na najvažnijim veličinama, a to su:

- Veličine tehničkog karaktera – Produktivnost procesa rada,
- Veličine ekonomskog karaktera – Ekonomičnost procesa rada, i
- Veličine finansijskog karaktera – Rentabilnost procesa rada.

**Produktivnost procesa rada** je mera efikasnosti koja pokazuje koliko se efektivno ulazne veličine (inputs) pretvaraju u izlazne veličine sistema (outputs). Pri proračunu se koristi sledeći opšti izraz:

$$P = \frac{\text{Output}}{\text{Input}} \quad (6.1.)$$

gde je

P – produktivnost procesa rada,

Output – izlazne veličine procesa rada (količina proizvoda, ukupan prihod, dodatna vrednost,...),

Input – ulazne veličine procesa rada (ukupan broj zaposlenih, broj zaposlenih u proizvodnji, broj ostvarenih časova rada, vrednost kapitala, vrednost materijala,...).

Prilikom rešavanja zadataka iz produktivnosti rada, u ovoj zbirci korišćiće se sledeći obrasci koji proizilaze iz obrasca (6.1.):

$$P = \frac{\sum_{j=1}^n (Q_j \cdot E_{\epsilon_j})}{\sum_{j=1}^n (Q_j \cdot N_{\epsilon_j})} \quad (6.2.)$$

$$P_j = \frac{Q_j \cdot E_{\epsilon_j}}{Q_j \cdot N_{\epsilon_j}} \quad (6.3.)$$

gde je

P – produktivnost na nivou celog sistema,

$P_j$  – produktivnost na nivou j-tog proizvoda,

$Q_j$  – obim proizvodnje j-tog proizvoda,

$E_{\xi j}$  – efektivno utrošeno vreme po jedinici j-tog proizvoda,

$N_{\xi j}$  – normirano vreme po jedinici j-tog proizvoda.

**Ekonomičnost procesa rada** je indikator kvaliteta procesa rada koji pokazuje koliko je proizvodne vrednosti ostvareno po jedinici utrošene vrednosti živog i minulog rada. Pri proračunu se koristi sledeći opšti izraz:

$$E = \frac{UP}{UT} = \frac{UP}{T_m + T_{sr} + T_l} \quad (6.4.)$$

gde je

E – ekonomičnost procesa rada,

UP – ukupan prihod,

UT – ukupni troškovi,

$T_m$  – troškovi materijala,

$T_{sr}$  – troškovi sredstva rada preneti na proizvod,

$T_l$  – troškovi bruto zarada.

Prilikom rešavanja zadataka iz ekonomičnosti rada, koristiće se i sledeći obrazac koji proizilazi iz obrasca (6.4.), a koji se odnosi na parcijalnu ekonomičnost:

$$E_j = \frac{Q}{U_j} \quad (6.5.)$$

gde je

$E_j$  – parcijalna ekonomičnost materijala ili sredstva rada ili radne snage,...

Q – ukupna proizvodnja,

$U_j$  – utrošak materijala ili sredstva rada ili radne snage,...

**Rentabilnost procesa rada** je merilo kvaliteta sistema koje pokazuje koliko jedinica dohotka se ostvaruje jedinicom angažovanih osnovnih i obrtnih sredstava. Opšti obrazac za izračunavanje rentabilnosti ima sledeći oblik:

$$R = \frac{D}{A_s} \quad (6.6.)$$

gde je

R – rentabilnost procesa rada,

D – dobit sistema,

$A_s$  – ukupna angažovana sredstva potrebna za rad sistema.

Prilikom rešavanja zadatka iz rentabilnosti rada, koristiće se i sledeći obrasci koji proizilaze iz obrasca (6.6.):

$$R_{nd} = \frac{D_n}{A_s} \quad (6.7.)$$

gde je

$D_n$  – neto dobit, računa se po obrascu:

$$D_n = D - PD \quad (6.8.)$$

PD – porez na dobit.

Dinamička rentabilnost se računa po obrascu:

$$I_R = \frac{R_{II}}{R_I} \cdot 100 \quad (6.9.)$$

gde je

$I_R$  – dinamička rentabilnost (ukupna ili neto vrednost),

$R_I$  – rentabilnost (ukupna ili neto vrednost) za I (prethodnu) godinu,

$R_{II}$  – rentabilnost (ukupna ili neto vrednost) za II (narednu) godinu.

Dinamička rentabilnost se može računati i pomoću baznih i lančanih indeksa.

Za bazni indeks se koristi sledeća formula:

$$I_{RBz} = \frac{R_{UDz}}{R_{UD0}} \cdot 100 \quad (6.10.)$$

gde je

$I_{RBz}$  – dinamička rentabilnost na osnovu baznog indeksa,

$R_{UDz}$  – ukupna rentabilnost z-tog perioda,

$R_{UD0}$  – ukupna rentabilnost nultog (prvog, početnog) perioda.

Za lančani indeks se koristi sledeća formula:

$$I_{RLz} = \frac{R_{UDz}}{R_{UDz-1}} \cdot 100 \quad (6.11.)$$

gde je

$I_{RLz}$  – dinamička rentabilnost na osnovu lančanog indeksa,

$R_{UDz}$  – ukupna rentabilnost z-tog perioda,

$R_{UDz-1}$  – ukupna rentabilnost z-1 – tog (prethodnog) perioda.

## 6.2. PRODUKTIVNOST PROCESA RADA

**Zadatak 6.1.** Pivara proizvodi 4 vrste piva. Kretanje obima proizvodnje, kao i normirano i utrošeno radno vreme, prikazani su u tabeli 6.1.

**Tabela 6.1.** Obim i vremena proizvodnje

Vrsta proizvoda	Obim proizvodnje $Q_j$ (kom. boca)	Normirano vreme po jedinici proizvoda $N_{\check{c}j}$ (min)	Efektivno utrošeno vreme po jedinici proizvoda $E_{\check{c}j}$ (min)
Svetlo pivo	20.000	2	2,5
Tamno pivo	8.000	3	2,5
Premijum pivo	4.000	3,5	3
Bezalkoholno pivo	4.000	5	5

Izračunati produktivnost procesa rada i to:

- Na nivou fabrike.
- Po vrstama proizvoda.

**Rešenje:**

a)

Koristi se obrazac (6.2.) za određivanje produktivnosti na nivou fabrike.

$$P = \frac{Q_1 \cdot E_{\check{c}1} + Q_2 \cdot E_{\check{c}2} + Q_3 \cdot E_{\check{c}3} + Q_4 \cdot E_{\check{c}4}}{Q_1 \cdot N_{\check{c}1} + Q_2 \cdot N_{\check{c}2} + Q_3 \cdot N_{\check{c}3} + Q_4 \cdot N_{\check{c}4}}$$

$$P = \frac{(20000 \cdot 2,5) + (8000 \cdot 2,5) + (4000 \cdot 3) + (4000 \cdot 5)}{(20000 \cdot 2) + (8000 \cdot 3) + (4000 \cdot 3,5) + (4000 \cdot 5)}$$

$$P = \frac{50000 + 20000 + 12000 + 20000}{40000 + 24000 + 14000 + 20000}$$

$$P = \frac{102000}{98000}$$

$$P = 1,04$$

Na nivou fabrike, efektivno utrošeno vreme je veće od planiranog za 4000h (102 000 – 98 000). Predviđene norme beleže podbačaj od 4% (1,04 – 1 = 0,04).

b)

Produktivnost po vrstama proizvoda računa se po obrascu (6.3.).

– Svetlo pivo:

$$P_1 = \frac{Q_1 \cdot E_{\epsilon 1}}{Q_1 \cdot N_{\epsilon 1}}$$

$$P_1 = \frac{20000 \cdot 2,5}{20000 \cdot 2} = \frac{50000}{40000}$$

$$P_1 = 1,25$$

– Tamno pivo:

$$P_2 = \frac{Q_2 \cdot E_{\epsilon 2}}{Q_2 \cdot N_{\epsilon 2}}$$

$$P_2 = \frac{8000 \cdot 2,5}{8000 \cdot 3} = \frac{20000}{24000}$$

$$P_2 = 0,83$$

– Premijum pivo:

$$P_3 = \frac{Q_3 \cdot E_{\epsilon 3}}{Q_3 \cdot N_{\epsilon 3}}$$

$$P_3 = \frac{4000 \cdot 3}{4000 \cdot 3,5} = \frac{12000}{14000}$$

$$P_3 = 0,86$$

– Bezalkoholno pivo:

$$P_4 = \frac{Q_4 \cdot E_{\epsilon 4}}{Q_4 \cdot N_{\epsilon 4}}$$

$$P_4 = \frac{4000 \cdot 5}{4000 \cdot 5} = \frac{20000}{20000}$$

$$P_4 = 1,00$$

Prebačaj norme je postignut kod proizvodnje tamnog piva za 17% ( $P_2 = 0,83$ ) i premijum piva za 14% ( $P_3 = 0,86$ ), dok je podbačaj norme zabeležen kod proizvodnje svetlog piva za 25% ( $P_1 = 1,25$ ). Ostvarena proizvodnja bezalkoholnog piva je u okviru plana ( $P_4 = 1,00$ ).

**Zadatak 6.2.** Fabrika proizvodi tri proizvoda (A, B i C). Proizvod A se sastoji iz 4 podsklopa (X1, X2, X3, X4). Proizvod B se sastoji iz 2 podsklopa (Y1, Y2). Proizvod C se sastoji iz 3 podsklopa (Z1, Z2, Z3). U tabeli 6.2. su prikazani obimi proizvodnje, normirana i efektivna vremena po jedinici proizvoda, odnosno podsklopova.

**Tabela 6.2.** Obim i vremena proizvodnje

Proizvod / podsklop	Obim proizvodnje $Q_j$ (kom.)	Normirano vreme po jedinici proizvoda $N_{\epsilon j}$ (min)	Efektivno utrošeno vreme po jedinici proizvoda $E_{\epsilon j}$ (min)
X1	15 000	4,0	3,5
X2	15 000	3,2	3,0
X3	15 000	1,5	1,4
X4	15 000	3,0	3,0
A	15 000	2,0	1,9
Y1	7 400	5,0	5,5
Y2	7 400	2,0	2,0
B	7 400	1,5	1,5
Z1	3 100	8,0	7,0
Z2	3 100	2,5	2,5
Z3	3 100	5,0	5,2
C	3 100	3,0	2,8

Izračunati produktivnost procesa rada i to:

- Na nivou podsklopa.
- Na nivou proizvoda.
- Na nivou fabrike.

**Rešenje:**

a)

Za određivanje produktivnosti na nivou podsklopa koristi se obrazac (6.3.).

– Proizvod A (podsklopovi):

$$P_{X1} = \frac{Q_1 \cdot E_{\epsilon 1}}{Q_1 \cdot N_{\epsilon 1}} = \frac{15000 \cdot 3,5}{15000 \cdot 4} = \frac{52500}{60000} = 0,87 - \text{prebačaj norme za 13\%}$$



$$P_{X2} = \frac{Q_1 \cdot E_{\xi 2}}{Q_1 \cdot N_{\xi 2}} = \frac{15000 \cdot 3}{15000 \cdot 3,2} = \frac{45000}{48000} = 0,93 - \text{prebačaj norme za 7\%}.$$

$$P_{X3} = \frac{Q_1 \cdot E_{\xi 3}}{Q_1 \cdot N_{\xi 3}} = \frac{15000 \cdot 1,4}{15000 \cdot 1,5} = \frac{21000}{22500} = 0,93 - \text{prebačaj norme za 7\%}.$$

$$P_{X4} = \frac{Q_1 \cdot E_{\xi 3}}{Q_1 \cdot N_{\xi 3}} = \frac{15000 \cdot 3}{15000 \cdot 3} = \frac{45000}{45000} = 1,00 - \text{norma u okviru plana}.$$

– Proizvod B (podsklopovi):

$$P_{Y1} = \frac{Q_2 \cdot E_{\xi 1}}{Q_2 \cdot N_{\xi 1}} = \frac{7400 \cdot 5,5}{7400 \cdot 5} = \frac{40700}{37000} = 1,10 - \text{podbačaj norme za 10\%}.$$

$$P_{Y2} = \frac{Q_2 \cdot E_{\xi 2}}{Q_2 \cdot N_{\xi 2}} = \frac{7400 \cdot 2}{7400 \cdot 2} = \frac{45000}{48000} = 1,00 - \text{norma u okviru plana}.$$

– Proizvod C (podsklopovi):

$$P_{Z1} = \frac{Q_3 \cdot E_{\xi 1}}{Q_3 \cdot N_{\xi 1}} = \frac{3100 \cdot 7}{3100 \cdot 8} = \frac{21700}{24800} = 0,87 - \text{prebačaj norme za 13\%}.$$

$$P_{Z2} = \frac{Q_3 \cdot E_{\xi 2}}{Q_3 \cdot N_{\xi 2}} = \frac{3100 \cdot 2,5}{3100 \cdot 2,5} = \frac{7750}{7750} = 1,00 - \text{norma u okviru plana}.$$

$$P_{Z3} = \frac{Q_3 \cdot E_{\xi 3}}{Q_3 \cdot N_{\xi 3}} = \frac{3100 \cdot 5,2}{3100 \cdot 5} = \frac{16120}{15500} = 1,04 - \text{podbačaj norme za 4\%}.$$

**b)**

Za određivanje produktivnosti na nivou proizvoda koristi se obrazac (6.2.).

– Proizvod A

$$P_A = \frac{Q_1 \cdot E_{\xi 1} + Q_1 \cdot E_{\xi 2} + Q_1 \cdot E_{\xi 3} + Q_1 \cdot E_{\xi 4} + Q_1 \cdot E_{\xi A}}{Q_1 \cdot N_{\xi 1} + Q_1 \cdot N_{\xi 2} + Q_1 \cdot N_{\xi 3} + Q_1 \cdot N_{\xi 4} + Q_1 \cdot N_{\xi A}}$$

$$P_A = \frac{(15000 \cdot 3,5) + (15000 \cdot 3) + (15000 \cdot 1,4) + (15000 \cdot 3) + (15000 \cdot 1,9)}{(15000 \cdot 4) + (15000 \cdot 3,2) + (15000 \cdot 1,5) + (15000 \cdot 3) + (15000 \cdot 2)}$$

$$P_A = \frac{52500 + 45000 + 21000 + 45000 + 28500}{60000 + 48000 + 22500 + 45000 + 30000} = \frac{192000}{205500}$$

$P_A = 0,93$  – prebačaj norme za 7%.

– Proizvod B

$$P_B = \frac{Q_2 \cdot E_{\epsilon 1} + Q_2 \cdot E_{\epsilon 2} + Q_2 \cdot E_{\epsilon B}}{Q_2 \cdot N_{\epsilon 1} + Q_2 \cdot N_{\epsilon 2} + Q_2 \cdot N_{\epsilon B}}$$

$$P_B = \frac{(7400 \cdot 5,5) + (7400 \cdot 2) + (7400 \cdot 1,5)}{(7400 \cdot 5) + (7400 \cdot 2) + (7400 \cdot 1,5)}$$

$$P_B = \frac{40700 + 14800 + 11100}{37000 + 14800 + 11100} = \frac{66600}{62900}$$

$P_B = 1,05$  – podbačaj norme za 5%.

– Proizvod C

$$P_C = \frac{Q_3 \cdot E_{\epsilon 1} + Q_3 \cdot E_{\epsilon 2} + Q_3 \cdot E_{\epsilon 3} + Q_3 \cdot E_{\epsilon C}}{Q_3 \cdot N_{\epsilon 1} + Q_3 \cdot N_{\epsilon 2} + Q_3 \cdot N_{\epsilon 3} + Q_3 \cdot N_{\epsilon C}}$$

$$P_C = \frac{(3100 \cdot 7) + (3100 \cdot 2,5) + (3100 \cdot 5,2) + (3100 \cdot 2,8)}{(3100 \cdot 8) + (3100 \cdot 2,5) + (3100 \cdot 5) + (3100 \cdot 3)}$$

$$P_C = \frac{21700 + 7750 + 16120 + 8680}{24800 + 7750 + 15500 + 9300} = \frac{54250}{57350}$$

$P_C = 0,94$  – prebačaj norme za 6%.

c)

Za određivanje produktivnosti na nivou fabrike koristi se obrazac (6.2.). Pri tome se sabiraju vrednosti dobijene u tački b) za sva tri proizvoda, odnosno:

$$P_F = \frac{192000 + 66600 + 54250}{205500 + 62900 + 57350}$$

$$P = \frac{312850}{325750}$$

$P = 0,96$

Na nivou fabrike, efektivno utrošeno vreme je manje od planiranog za 12 900h. Predviđene norme beleže predbačaj od 4% ( $1,00 - 0,96 = 0,04$ ).

### 6.3. EKONOMIČNOST PROCESA RADA

**Zadatak 6.3.** Pekara je u toku jedne godine ostvarila proizvodnju od 240 000 vekni hleba. Za proizvodnju ove količine hleba je utrošeno 110 000 kg brašna, 5 840 časova rada mašina i 17 520 časova rada radnika. Izračunata iznos parcijalne ekonomičnosti procesa rada pekare.

**Rešenje:**

Za određivanje ekonomičnosti koristi se obrazac (6.5.).

– Materijal:

$$E_m = \frac{Q}{U_m}$$

$$E_m = \frac{240000}{110000}$$

$$E_m = 2,18$$

– Sredstva rada:

$$E_{sr} = \frac{Q}{U_{sr}}$$

$$E_{sr} = \frac{240000}{5840}$$

$$E_{sr} = 41,09$$

– Radna snaga:

$$E_{rs} = \frac{Q}{U_{rs}}$$

$$E_{rs} = \frac{240000}{17520}$$

$$E_{rs} = 13,69$$

**Zadatak 6.4.** Strugara je u jednoj godini ostvarila proizvodnju od 62 000 tona tehničke građe. Da bi se proizvela jedna tona tehničke građe, potrebno je obraditi 3,2 tone drveta i pritom utrošiti 2 časa rada mašine i 2,8 časova rada radnika. Na osnovu datih podataka odrediti iznos parcijalne ekonomičnosti strugare.

**Rešenje:**

Najpre se određuju utrošci materijala, sredstava rada i radne snage:

$$U_m = 62\,000 \cdot 3,2 = 198\,400$$

$$U_{sr} = 62\,000 \cdot 2 = 124\,000$$

$$U_{rs} = 62\,000 \cdot 3,2 = 173\,600$$

– Materijal:

$$E_m = \frac{Q}{U_m}$$

$$E_m = \frac{62000}{198400}$$

$$E_m = 0,31$$

– Sredstva rada:

$$E_{sr} = \frac{Q}{U_{sr}}$$

$$E_{sr} = \frac{62000}{124000}$$

$$E_{sr} = 0,50$$

– Radna snaga:

$$E_{rs} = \frac{Q}{U_{rs}}$$

$$E_{rs} = \frac{62000}{173600}$$

$$E_{rs} = 0,35$$

**Zadatak 6.5.** U jednoj fabrici je ostvarena proizvodnja u iznosu od 8 800 000 nj. Ukupni troškovi proizvodnje ove fabrike su iznosili 6 820 000 nj. U strukturi ukupnih troškova, troškovi materijala učestvuju sa 60%, troškovi sredstava za rad sa 15% i troškovi radne snage sa 25%. Izračunati:

- a) Ukupnu ekonomičnost.
- b) Parcijalnu ekonomičnost.

**Rešenje:**

Za određivanje ekonomičnosti koristi se obrazac (6.4.).

*a)*

$$E_u = \frac{VP}{UT}$$

$$E_u = \frac{8800000}{6820000}$$

$$E_u = 1,29$$

*b)*

Najpre je potrebno odrediti novčane iznose troškova materijala, sredstava za rad i radne snage, a na osnovu njihovog procentualnog učešća u strukturi ukupnih troškova:

Troškovi materijala:

$$6\,820\,000 \cdot 0,6 = 4\,092\,000 \text{ nj.}$$

Troškovi sredstava za rad:

$$6\,820\,000 \cdot 0,15 = 1\,023\,000 \text{ nj.}$$

Troškovi radne snage:

$$6\,820\,000 \cdot 0,25 = 1\,705\,000 \text{ nj.}$$

– Materijal:

$$E_m = \frac{VP}{T_m}$$

$$E_m = \frac{8800000}{4092000}$$

$$E_m = 2,15$$

– Sredstva rada:

$$E_{sr} = \frac{VP}{T_{sr}}$$

$$E_{sr} = \frac{8800000}{1023000}$$

$$E_{sr} = 8,60$$

– Radna snaga:

$$E_{rs} = \frac{VP}{T_{rs}}$$

$$E_{rs} = \frac{8800000}{1705000}$$

$$E_{rs} = 5,16$$

## 6.4. RENTABILNOST PROCESA RADA

**Zadatak 6.6.** Jedno proizvodno preduzeće je ostvarilo ukupnu dobit od 325000 nj. Porez na dobit iznosi 25 000 nj. Preduzeće je angažovalo sredstva u iznosu od 2 500 000 nj. Potrebno je odrediti nivo rentabilnosti ovog preduzeća.

### Rešenje:

Najpre je potrebno odrediti rentabilnost na osnovu ukupne dobiti na bazi obrasca (6.6.).

$$R_{ud} = \frac{D}{A_S}$$

$$R_{ud} = \frac{325000}{2500000}$$

$$R_{ud} = 0,13$$

Rentabilnost na osnovu neto dobiti računa se po obrascu (6.7.).

$$R_{nd} = \frac{D_n}{A_S}$$

gde je  $D_n$  – neto dobit, računa se po obrascu (6.8.).

$$D_n = D - PD$$

$$D_n = 325\ 000 - 25\ 000$$

$$D_n = 300\ 000 \text{ nj.}$$

Sledi

$$R_{nd} = \frac{300000}{2500000}$$

$$R_{nd} = 0,12$$

**Zadatak 6.7.** Kompanija X je u 2017. godini ostvarila ukupnu dobit u iznosu od 300 000 nj. uz angažovana sredstva u iznosu od 900 000 nj. U 2018. godini, kompanija je ostvarila ukupnu dobit u iznosu od 250 000 nj. uz angažovana sredstva u iznosu od 1 000 000 nj. Izračunati nivo rentabilnosti kompanije X, kao i dinamičku rentabilnost.

**Rešenje:**

Nivo rentabilnost kompanije se određuje na osnovu obrasca (6.6.).

– 2017. godina:

$$R_{udI} = \frac{D}{A_S}$$

$$R_{udI} = \frac{300000}{900000}$$

$$R_{udI} = 0,33$$

– 2018. godina:

$$R_{udII} = \frac{D}{A_S}$$

$$R_{udII} = \frac{250000}{1000000}$$

$$R_{udII} = 0,25$$

Dinamička rentabilnost se računa po obrascu (6.9.).

$$I_R = \frac{R_{udII}}{R_{udI}} \cdot 100$$

$$I_R = \frac{0,25}{0,33} \cdot 100$$

$$I_R = 75,76\%$$

Dinamička rentabilnost pokazuje smanjenje ukupne rentabilnosti u 2018. godini u odnosu na 2017. godinu.



**Zadatak 6.8.** Kompanija je u 2017. godini (I period) ostvarila ukupnu dobit u iznosu od 20 000 nj. U istom periodu je angažovala sredstva u iznosu od 25 000 nj. U 2018. godini (II period) ostvarena ukupna dobit je iznosila 28 000 nj., uz angažovana sredstva u iznosu od 30 000 nj. Godišnji porez na dobit iznosi 6 000 nj. Izračunati:

- Nivo rentabilnosti kompanije na osnovu ukupne dobiti.
- Nivo rentabilnosti kompanije na osnovu neto dobiti.
- Dinamičku rentabilnost kompanije na osnovu ukupne dobiti.
- Dinamičku rentabilnost kompanije na osnovu neto dobiti.

**Rešenje:**

**a)**

Nivo rentabilnost kompanije na osnovu ukupne dobiti se određuje na osnovu obrasca (6.6.).

– I period:

$$R_{udI} = \frac{D}{A_S}$$

$$R_{udI} = \frac{20000}{25000}$$

$$R_{udI} = 0,80$$

– II period:

$$R_{udII} = \frac{D}{A_S}$$

$$R_{udII} = \frac{28000}{30000}$$

$$R_{udII} = 0,93$$

**b)**

Nivo rentabilnost kompanije na osnovu neto dobiti se određuje na osnovu obrazaca (6.7.) i (6.8).

– I period:

$$R_{ndI} = \frac{D_N}{A_s}$$

$$D_N = D - PD = 20\,000 - 6\,000$$

$$D_N = 14\,000 \text{ nj}$$

$$R_{ndI} = \frac{14000}{25000}$$

$$R_{ndI} = 0,56$$

– II period:

$$R_{ndII} = \frac{D_N}{A_s}$$

$$D_N = D - PD = 28\,000 - 6\,000$$

$$D_N = 22\,000 \text{ nj}$$

$$R_{ndII} = \frac{22000}{30000}$$

$$R_{ndII} = 0,73$$

c)

Dinamička rentabilnost kompanije na osnovu ukupne dobiti se računa po obrascu (6.9.).

$$I_{RUD} = \frac{R_{udII}}{R_{udI}} \cdot 100 = \frac{0,93}{0,80} \cdot 100$$

$$I_{RUD} = 116,25\%$$

Dinamička rentabilnost pokazuje povećanje ukupne rentabilnosti u II periodu u odnosu na I period.

d)

Dinamička rentabilnost kompanije na osnovu neto dobiti se računa takođe na osnovu obrasca (6.9.).

$$I_{RND} = \frac{R_{ndII}}{R_{ndI}} \cdot 100 = \frac{0,73}{0,56} \cdot 100$$

$$I_{RND} = 130,35\%$$

Dinamička rentabilnost pokazuje povećanje neto rentabilnosti u II periodu u odnosu na I period.

**Zadatak 6.9.** Proizvodna kompanija je u petogodišnjem vremenskom periodu ostvarila sledeće iznose dobiti uz odgovarajuća angažovana sredstva – tabela 6.3.

**Tabela 6.3.** Dobiti i angažovana sredstva kompanije

Vremenski period	Ukupna dobit D (nj)	Angažovana sredstva A <sub>s</sub> (nj)
2014. (I)	200 000	850 000
2015. (II)	180 000	900 000
2016. (III)	210 000	950 000
2017. (IV)	170 000	900 000
2018. (V)	250 000	900 000

Izračunati:

- Nivo rentabilnosti kompanije.
- Dinamičku rentabilnost kompanije pomoću baznih indeksa.
- Dinamičku rentabilnost kompanije pomoću lančanih indeksa.

**Rešenje:**

*a)*

Nivo rentabilnost kompanije na osnovu ukupne dobiti se određuje na osnovu obrasca (6.6.).

$$R_{udI} = \frac{D}{A_s} = \frac{200000}{850000} = 0,23$$

$$R_{udII} = \frac{D}{A_s} = \frac{180000}{900000} = 0,20$$

$$R_{udIII} = \frac{D}{A_s} = \frac{210000}{950000} = 0,22$$

$$R_{udIV} = \frac{D}{A_s} = \frac{170000}{900000} = 0,19$$

$$R_{udV} = \frac{D}{A_S} = \frac{250000}{900000} = 0,28$$

**b)**

Dinamička rentabilnost kompanije pomoću baznih indeksa se određuje po formuli (6.10.).

$$I_{RBI} = \frac{R_{UDI}}{R_{UDI}} \cdot 100 = \frac{0,23}{0,23} \cdot 100 = 100\%$$

$$I_{RBI} = \frac{R_{UDII}}{R_{UDI}} \cdot 100 = \frac{0,20}{0,23} \cdot 100 = 87\%$$

$$I_{RBI} = \frac{R_{UDIII}}{R_{UDI}} \cdot 100 = \frac{0,22}{0,23} \cdot 100 = 96\%$$

$$I_{RBI} = \frac{R_{UDIV}}{R_{UDI}} \cdot 100 = \frac{0,19}{0,23} \cdot 100 = 83\%$$

$$I_{RBI} = \frac{R_{UDV}}{R_{UDI}} \cdot 100 = \frac{0,28}{0,23} \cdot 100 = 122\%$$

**c)**

Dinamička rentabilnost kompanije pomoću lančanih indeksa se određuje po formuli (6.11.).

$$I_{RLI} = \frac{R_{UDI}}{R_{UDI}} \cdot 100 = \frac{0,23}{0,23} \cdot 100 = 100\%$$

$$I_{RLI} = \frac{R_{UDII}}{R_{UDI}} \cdot 100 = \frac{0,20}{0,23} \cdot 100 = 87\%$$

$$I_{RLI} = \frac{R_{UDIII}}{R_{UDII}} \cdot 100 = \frac{0,22}{0,20} \cdot 100 = 110\%$$

$$I_{RLI} = \frac{R_{UDIV}}{R_{UDIII}} \cdot 100 = \frac{0,19}{0,22} \cdot 100 = 86\%$$

$$I_{RLI} = \frac{R_{UDV}}{R_{UDIV}} \cdot 100 = \frac{0,28}{0,19} \cdot 100 = 147\%$$

## LITERATURA

1. **Apergis, N., Ewing, B.T., Payne, J.E.** (2016). A time series analysis of oil production, rig count and crude oil price: Evidence from six U.S. oil producing regions. *Energy*, 97, 339-349.
2. **Arsovski, S.** (2006). Menadžment procesima, Mašinski fakultet Kragujevac, Kragujevac.
3. **Bauk, S.I.** (2010). Kvantitativne metode optimizacije u funkciji naučnog menadžmenta, Univerzitet Crne Gore, Podgorica.
4. **Bhargav, A., Sridhar, C.N.V., Deva Kumar, M.L.S.** (2017). Study of Production Scheduling Problem for Reconfigurable Manufacturing System (RMS). *Materials Today: Proceedings*, 4 (8), 7406–7412.
5. **Bradić-Martinović, A.** (2006). Predviđanje cena akcija pomoću tehničke analize. *Economic Annals*, 170, 125-146.
6. **Collewet, C., Sauermann, J.** (2017). Working hours and productivity. *Labour Economics*, 47, 96–106.
7. **Cupek, R., Ziebinski, A., Huczala, L., Erdogan, H.** (2016). Agent-based manufacturing execution systems for short-series production scheduling. *Computers in Industry*, 82, 245–258.
8. **Dorfman, J.H., Koop, G.** (2005). Current developments in productivity and efficiency measurement. *Journal of Econometrics*, 126(2), 233–240.
9. **Espinosa-Garza, G., Loera-Hernández, I., Antonyan, N.** (2017). Increase of productivity through the study of work activities in the construction sector. *Procedia Manufacturing*, 13, 1003–1010.
10. **Genua, C., Giuffrida, S., Rinaudo, S.** (2006). “Gantt charts for production flow” framework. *IFAC Proceedings Volumes*, 39(3), 691-696.
11. **Hannula, M.** (2002). Total productivity measurement based on partial productivity ratios. *International Journal of Production Economics*, 78(1), 57–67.
12. **Hees, A., Reinhart, G.** (2015). Approach for production planning in reconfigurable manufacturing systems. *Procedia CIRP*, 33, 70–75.
13. **Joksimović, D.** (2006). Poslovna statistika. Megatrend univerzitet primenjenih nauka, Beograd.

14. **Kadambur, R., Kotecha, P.** (2016). Optimal production planning in a petrochemical industry using multiple levels. *Computers & Industrial Engineering*, 100, 133–143.
15. **Kim, S.H., Lee, Y.H.** (2016). Synchronized production planning and scheduling in semiconductor fabrication. *Computers & Industrial Engineering*, 96, 72–85.
16. **Lee, J., Park, Y-J., Choi, C-H., Han, C-H.** (2017). BIM-assisted labor productivity measurement method for structural formwork. *Automation in Construction*, 84, 121–132.
17. **Martínez, K.Y.P., Toso, E.A.V., Morabito, R.** (2016). Production planning in the molded pulp packaging industry. *Computers & Industrial Engineering*, 98, 554–566.
18. **Milojević, I, Guberinić, R.** (2012). Stohastički model prognoze potražnje rezervnih delova. *Vojnotehnički glasnik, LX(1)*, 216-234.
19. **Milovančević, M., Milčić, D., Anđelković, B.** (2015). Projektni menadžment, Mašinski fakultet u Nišu, Niš.
20. **Mori, J., Mahalec, V.** (2017). Planning and scheduling of steel plates production. Part II: Scheduling of continuous casting. *Computers and Chemical Engineering*, 101, 312–325.
21. **Moussavi, S.E., Mahdjoub, M., Grunder, O.** (2016). Reducing production cycle time by ergonomic workforce scheduling. *IFAC-PapersOnLine*, 49(12), 419–424.
22. **Myrodia, A., Kristjansdottir, K., Hvam, L.** (2017). Impact of product configuration systems on product profitability and costing accuracy. *Computers in Industry*, 88, 12–18.
23. **Nikolić, R.** (2002). *Ekonomika preduzeća – pitanja, zadaci, rešenja, drugo izmenjeno i dopunjeno izdanje*, Grafomag, Beograd.
24. **Park, K.-P., Ham, S.-H., Lee, C.-Y.** (2016). Application and validation of production planning simulation in shipbuilding. *Ocean Engineering*, 114, 154–167.
25. **Pastor, R., Altimiras, J., Mateo, M.** (2009). Planning production using mathematical programming: The case of a woodturning company. *Computers & Operations Research*, 36, 2173-2178.
26. **Pavlović, M.** (2008). *Upravljanje proizvodnjom, „CEKOM” – books d.o.o., Novi Sad.*

27. **Perry, C., Preston, W.J.** (1986). Production planning with linear programming: From textbook to factory. *Omega*, 14(3), 233-238.
28. **Petrić, J., Šarenac, L., Kojić, Z.** (1996). Operaciona istraživanja II – zbirka rešenih zadataka, Naučna knjiga, Beograd.
29. **Rawat, G.S., Gupta, A., Juneja, C.** (2018). Productivity Measurement of Manufacturing System. *Materials Today: Proceedings*, 5(1), 1483–1489.
30. **Sabharwal, S., Garg, S.** (2013). Determining cost effectiveness index of remanufacturing: A graph theoretic approach. *International Journal of Production Economics*, 144(2), 521–532.
31. **Sajfert, Z., Nikolić, M.** (2007). Proizvodno poslovni sistemi, Tehnički fakultet „Mihajlo Pupin”, Zrenjanin.
32. **Salvatore, D.** (1994). Ekonomija za menadžere u svjetskoj privredi. Mate, Zagreb.
33. **Segerstedt, A.** (2017). Cover-Time Planning/Takt Planning: A technique for materials requirement and production planning. *International Journal of Production Economics*, 194, 25–31.
34. **Sel, Ç., Bilgen, B., Bloemhof-Ruwaard, J.** (2017). Planning and scheduling of the make-and-pack dairy production under lifetime uncertainty. *Applied Mathematical Modelling*, 51, 129–144.
35. **Šošić, I.** (2004). Primijenjena statistika. Školska knjiga, Zagreb.
36. **Tedić, M.** (2011). Autokorelacija i autlajeri u predviđanju vrednosti kursa. Master rad, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad.
37. **Zelenović, D.M.** (2009). Projektovanje proizvodnih sistema, Fakultet tehničkih nauka u Novom Sadu, Novi Sad.
38. **Xu, J., Serrano, A., Lin, B.** (2017). Optimal production and rationing policy of two-stage tandem production system. *International Journal of Production Economics*, 185, 100–112.
39. **Yang, Z., Ma, Z., Wu, S.** (2016). Optimized flowshop scheduling of multiple production lines for precast production. *Automation in Construction*, 72, 321–329.
40. **Yurtsev, A., Jenkins, G.P.** (2016). Cost-effectiveness analysis of alternative water heater systems operating with unreliable water supplies. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 54, 174–183.

41. **Wen, H., Hou, S., Liu, Z., Liu, Y.** (2017). An optimization algorithm for integrated remanufacturing production planning and scheduling system. *Chaos, Solitons and Fractals*, 105, 69–76.
42. **Wu, J., Wang, J., Lu, H., Dong, Y., Lu, X.** (2013). Short term load forecasting technique based on the seasonal exponential adjustment method and the regression model. *Energy Conversion and Management*, 70, 1–9.