**THE IMPLEMENTATION OF THE SIMPLEX METHOD OF THE LINEAR PROGRAMMING IN MIXED MATRIX GAMES**

**Dušan Bogdanović**

# *University of Belgrade, Technical Faculty in Bor, Engineering Management Department*

# *Bor, Serbia*

**Abstract:** Each antagonistic game in game theory can be solved by linear programming. The aim of applying a linear programming is to determine optimal strategies of observed game participants, who are in a mutual conflict, and to determine the value of the game with the previous defining of a mathematical model. Therefore, the aim of this paper is to show the possibility of applying the Simplex method of linear programming in mixed matrix games and to define the methodology by which the value of the game without a saddle point and the optimal strategies of players can be determined, but through the concrete example from practice.

**Keywords:** *Simplex method, Game Theory, linear programming, matrix games, optimal strategies of players.*

**PRIMENA SIMPLEX METODE LINEARNOG PROGRAMIRANJA U MEŠOVITIM MATRIČNIM IGRAMA**

**Dušan Bogdanović**

*Univerzitet u Beogradu, Tehnički fakultet u Boru, Odsek za inženjerski menadžment*

*Bor, Srbija*

**Apstrakt:** Svaka antagonistička igra u teoriji igara može biti rešena linearnim programiranjem. Cilj primene linearnog programiranja jeste određivanje optimalnih strategija posmatranih učesnika igre, koji se nalaze u međusobnom konfliktu, odnosno određivanje vrednosti igre uz prethodnu adekvatnu postavku matematičkog modela. Stoga, i sam cilj ovog rada je da ukaže na mogućnost primene Simpleks metode linearnog programiranja u mešovitim matričnim igrama i da kroz konkretan primer iz prakse definiše metodologiju kojom se do vrednosti igre bez sedlaste tačke i do optimalnih strategija igrača može doći.

**Ključne reči:** *Simpleks metoda, Teorija igara, linearno programiranje, matrične igre, optimalne strategije igrača.*

**1. UVOD**

Iako se pojam *igre* vrlo često poistovećuje sa zabavom i razonodom, u uslovima tržišne ekonomije koja je dominantna u današnjem poslovnom svetu, on podražava dijametralno suprotno značenje i oličava neku vrstu sukoba u kome jedna strana pobeđuje, dok druga gubi [1]. Naime, rezultat igre ne zavisi samo od poteza jednog igrača, već i od izbora, tj. alternativa koje izaberu drugi igrači, čiji su interesi u suprotnosti sa interesima ovog prvog. Upravo s tog aspekta javlja se situacija neizvesnosti u odlučivanju, a sam konkretan model realne konfliktne situacije definiše se kao *igra* [2]*.* Kako su igrači strane koje se nalaze u konfliktu s obzirom na svoje suprotne interese, oni teže da budu racionalni u odabiru svojih poteza nastupa na tržištu, tj. da maksimiziraju svoju ličnu dobrobit i pobede u igri. To će učiniti jedino odabirom *optimalne strategije*, koje će im obezbediti maksimalni mogući srednji dobitak, odnosno minimalni mogući srednji gubitak.

U zavisnosti od toga da li su u pitanju proste ili meštovite matrične igre, zavisiće i metodologija njihovog rešavanja u smislu određivanja optimalnih strategija igrača, kao i vrednosti datih igara. S obzirom da će ovaj rad biti baziran na mešovitoj matričnoj igri, koja će uključivati dva igrača (dva privredna društva), težište i fokus primenjene metodologije bazirani su na linearnom programiranju, odnosno na Simpleks metodi.

*Prvi deo rada* posvećen je osnovnim dimenzijama teorije igara, osobito aspektima koji se tiču mešovitih matričnih igara, kao i osnovnim postulatima linearnog programiranja za rešavanje problema iz oblasti matričnih igara višeg reda.

*Drugi deo rada* zasniva se na samoj primeni Simpleks metode linearnog programiranja u postupku rešavanja konkretnog zadatka iz prakse iz domena mešovitih igara, a s ciljem da se ukaže na praktičnu primenu ove metode u ovoj oblasti.

**2. TEORIJSKO-METODOLOŠKE POSTAVKE RADA**

2.1. Mešovite matrične igre

Kako je već napomenuto u uvodnom delu, kada matrica nema sedlastu tačku, onda je određivanje optimalne strategije igrača i vrednosti igre *(v)* daleko kompleksnije. Naime, ukoliko igrač A nema čistu strategiju koja bi mu obezbedila minimalni zagarantovani dobitak, odnosno igrač B nema strategiju kojom se osigurava gornja granica plaćanja, onda oni više ne biraju po jednu strategiju, već se odlučuju za različite strategije, pri čemu je izbor svake od njih određen odgovarajućom verovatnoćom. [2] Ovako definisan konkurentski odnos između igrača zasniva se na tzv. nultoj tački, odnosno na *igri sa nultim zbirom[[1]](#footnote-1)*, pri kojoj se preko verovatnoća referenciraju različite alternative igrača istovremeno, u zavisnosti od razvoja situacije [3].

Kod mešovitih matričnih igara racionalno strateško ponašanje učesnika igre ne možemo da postignemo jednostavnim oslanjanjem na Valdov *maxmin-minmax princip*, s obzirom da nema sedlaste tačke za koju bi vrednost igre i gornja i donja granica bile jednake, već se sada data vrednost igre nalazi u određenom rasponu između tih granica [4].

Kod mešovitih igara, igrač A na raspolaganju ima *m* alternativa (strategija, poteza) i svaku od njih bira sa određenom verovatnoćom *p*1, *p*2, *p*3, ..., *pm*, pri čemu one kao takve zadovoljavaju sledeće uslove [5]:

*pi* ≥ 0, *i* = 1, 2, ..., *m* (1)

(2)

Vektor *P* = *(p*1, *p*2, *p*3, ..., *pm)* naziva se *mešovitom strategijom igrača A*, pri čemu najmanje dve verovatnoće u vektoru moraju biti različite od nule.

Na sličan način posmatra se i igrač B. On ima na raspolaganju *n* alternativa (strategija) i za svaku se odlučuje sa određenom verovanoćom. Verovatnoće za izbor njegovih strategija označavaju se sa *q*1, *q*2, *q*3, ..., *qn*, a uslove koje te verovatnoće moraju zadovoljiti su sledeći [2]:

*qj* ≥ 0, *j* = 1,2, ..., *n* (3)

(4)

Vektor *Q* = *(q*1, *q*2, *q*3, ..., *qn)* naziva se *mešovitom strategijom igrača B*, pri čemu, kao i malopre, najmanje dve verovatnoće u vektoru moraju biti različite od nule.

Kada oba igrača upotrebljavaju mešovite strategije *P* i *Q,* onda vrednost igre neće odgovarati samo vrednosti jednog elementa matrice plaćanja. Igrač A će dobiti iznos *aij* od igrača B samo ako odabere *i*-tu alternativu, a igrač B *j*-tu alternativu. Verovatnoća da igrač A odabere *i*-tu alternativu jednaka je *pi*, a verovatnoća da igrač B izabere *j*-tu alternativu jednaka je *qj*. Kako će igrač A nastojati da izborom svoje strategije uveća vrednost igre, a igrač B da istu što više smanji, oni će tada nastojati da izaberu svoje optimalne strategije. Rešenje mešovite igre je par optimalnih strategija *P\** (za igrača A) i *Q\** (za igrača B), koje poseduju osobinu da ako se jedan od učesnika igre pridržava svoje optimalne strategije, onda ni drugom ne odgovara da odstupa od svoje optimalne strategije. To znači da je ispunjen naredni uslov za sve moguće vrednosti vektora *P* i *Q* [2]:

E(*P*, *Q\**) ≤ E(*P\**, *Q\**) ≤ E(*P\**, *Q*) (5)

Predstavljena relacija podrazumeva da ako igrač A koristi optimalnu strategiju *P\**, on osigurava da mu srednji dobitak bude najmanje E(*P\**,*Q\**), pod uslovom da igrač B odabere svoju optimalnu strategiju *Q\** [2].Takođe, i igrač B izborom optimalne strategije *Q\** osigurava da njegov srednji gubitak ne bude veći od E(*P\**,*Q\**), u slučaju da igrač A odabere svoju optimalnu strategiju *P\** [2].

Dakle, vektori *P\** i *Q\** predstavljaju rešenje matrične igre i tzv. optimalne mešovite strategije, na osnovu kojih se vrednost igre *v* može odrediti na sledeći način [6]:

*2.1.1. Metode rešavanja mešovitih matričnih igara*

Već je napomenuto da je teorija igara matematička disciplina koja se bavi formalizacijom procesa odlučivanja u situacijama gde učestvuje odg. broj subjekata odlučivanja (igrača). To su sve one situacije kada konačan ishod ne zavisi samo od izbora jednog subjekta odlučivanja, nego i od izbora svih ostalih koji u datoj igri učestvuju. Iz toga sledi da se svaki igrač mora ponašati „strateški“, to jest mora predviđati ponašanje ostalih igrača i tome se prilagođavati. [7]

Upravo zato, u postupku rešavanja mešovitih matričnih igara izdvaja se izvestan broj metoda, koje omogućavaju diferenciranje strategija igrača i koje bi bile odraz njihovog strateškog načina razmišljanja [2] [8]:

1. *analitički metod rešavanja* za matrice reda 2x2 (direktna primena formula i preko parcijalnih izvoda funkcije),
2. *grafički metod rešavanja* za matrice reda 2x2, 2x*n* ili *m*x2 i
3. *metoda rešavanja primenom linearnog programiranja* za matrice višeg reda *m*x*n.*

U ovom radu fokus je stavljen na rešavanje mešovitih matričnih igara višeg reda primenom Simpleks metode linearnog programiranja.

2.1. Rešavanje mešovitih matričnih igara primenom linearnog programiranja

Linearno programiranje je jedna od najbolje proučavanih metoda optimizacije i rešavanja problema, ne samo u domenu teorije igara, već i u mnogim drugim oblastima. Velikom broju svetskih problema formulisan je linearni karakter, što je i doprinelo tome da primena linearnog programiranja ima veliki značaj u njihovom rešavanju. [9] Algoritam Simpleks metode, razvijen od strane Dantziga u cilju rešavanja problema linearnog programiranja, počinje odgovarajućom matematičkom osnovom i koristi čitav stožer operacija u cilju očuvanja izvodljivosti modela i garantovanja monotonosti objektivne vrednosti istog [10].

Postupak formiranja matematičkog modela pri primeni linearnog programiranja za rešavanje mešovitih matričnih igara polazi od definisane matrice plaćanja. Optimalna strategija *P\** igrača *A* ima osobinu da on njome dobija najminimalnije vrednosti igre *v*, bez obzira na to koju strategiju odabere igrač *B* [2]. Od očekivanih srednjih vrednosti dobitaka igrača *A*, za pojedine čiste strategije igrača *B,* formira se sl. sistem nejednačina [2]:

Ovom sistemu nejednačina dodaju se i uslovi koje moraju zadovoljiti verovatnoće *pi* [2]:

*pi* ≥ 0, *i* =1, 2, …, *m* (9)

Kada se sistem nejednačina (7) i jednačinu (8) podeli sa vrednošću igre *v*, dobija se [2]:

Uvodeći u izraze (10) i (11) sledeću smenu [2]:

dobija se [2]:

Ako se analizira jednačina (14), igrač *A* će nastojati da svojom strategijom što više poveća vrednost igre *v*. On će to postići ako u jednačini (14) što više umanji njenu recipročnu vrednost 1/*v*, odnosno [2]:

Polazeći od matematičkog modela matrične igre za igrača *A*, dobijaju se svi elementi modela linearnog programiranja. Dakle, potrebno je da se minimizira vrednost funkcije kriterijuma za prvog učesnika igre [2]:

Na sličan način formira se linearni model i za igrača *B*. Njegova optimalna strategija *Q\** ima osobinu da on njome gubi najviše vrednosti igre *v*, bez obzira na to koju strategiju odabere igrač *A* [2]. Od očekivanih srednjih vrednosti gubitaka igrača *B*, za pojedine čiste strategije igrača *A,* formira se sl. sistem nejednačina [2]:

Datom sistemu dodaju se i uslovi koje moraju zadovoljiti verovatnoće *qj* [2]:

*qj* ≥ 0, *j* =1, 2, …, *n* (19)

Kada se sistem nejednačina (17) i jednačina (18) podeli sa *v*, dobija se [2]:

Uvodeći u izraze (20) i (21) smenu [2]:

dobija se sledeći linearni problem [2]:

Ako se analizira jednačina (24), igrač *B* će nastojati da svojom strategijom što je moguće više smanji vrednost igre *v*. On će to postići ako u jednačini (24) što više poveća njenu recipročnu vrednost 1/*v*, odnosno [2]:

Polazeći od matematičkog modela matrične igre za igrača *B*, dobijaju se svi elementi modela linearnog programiranja. Dakle, funkcija kriterijuma za drugog učesnika igre izgledaće na sledeći način [2]:

Na osnovu svega navedenog, lako se može zaključiti da su oba linearna modela međusobno povezana, te da su jedan drugome *dualni*. Stoga, dovoljno je rešiti jedan od njih i da se na osnovu dobijenog rešenja iznađe i rešenje ovog drugog. [6]

**3. REZULTATI PRAKTIČNOG PRIMERA**

U postupku implementiranja Simpleks metode linearnog programiranja i softverske podloge za rešavanje mešovitih matričnih igara, definisan je jedan praktičan problem borske turističke agencije „Aster travel“ za koji su primenjena metodologija i korišćeni programski paket Lindo dali odgovarajuće rezultate.

Naime, na osnovu dosadašnje velike potražnje koja je među stanovnicima opštine Bor vladala za turističkim aranžmanima za letovanje u Grčkoj, turistička agencija „Aster travel“ je za nastupajuću sezonu 2016/2017. ugovorila saradnju sa receptivnom turističkom agencijom „Yalos Tours“ iz Grčke, a u cilju organizovanja letovanja domaćih turista po što povoljnijim cenama u sledećim mestima: Paralija, Olimpik Bič, Leptokarija, Hanioti i Nei Pori. Zadatak inicijativne turističke agencije iz Bora u predsezoni bio je da u jednom ili više letovališta obezbedi 70 ležajeva po smeni u postojećim kapacitetima, i to za period od juna do septembra meseca. Receptivna agencija iz Grčke koja je preuzela odgovornost dovođenja turista iz Bora u ova letovališta potvrdila je mogućnost celosezonskog obezbeđivanja neophodnih 70 ležajeva po svakoj smeni, i to u sledećim smeštajnim kapacitetima: hoteli sa 4\*, hoteli sa 3\*, garni hoteli i vile i apartmani. Dogovoreno je i da u zavisnosti od izbora letovališta i vrste smeštaja, organizator iz Grčke ponudi i odgovarajuće bonitete turističkoj agenciji „Aster travel“ iz Bora, i to na sledeći način:

* za Paraliju:

10% popusta za hotele sa 4\*,

8% popusta za hotele sa 3\*,

5% popusta za garni hotele i

12% popusta za vile i apartmane.

* za Olimpik Bič:

7% popusta za hotele sa 4\*,

4% popusta za hotele sa 3\*,

5% popusta za garni hotele i

4% popusta za vile i apartmane.

* za Leptokariju:

9% popusta za hotele sa 4\*,

10% popusta za hotele sa 3\*,

11% popusta za garni hotele i

5% popusta za vile i apartmane.

* za Hanioti:

11% popusta za hotele sa 4\*,

9% popusta za hotele sa 3\*,

5% popusta za garni hotele i

7% popusta za vile i apartmane.

* za Nei Pori:

5% popusta za hotele sa 4\*,

4% popusta za hotele sa 3\*,

5% popusta za garni hotele i

3% popusta za vile i apartmane.

3.1. Rešavanje definisanog problema primenom SIMPLEX metode

Za tako definisan zadatak, u narednim koracima postavljen je model linearnog programiranja prema organizatoru iz Grčke i rešen primenom Simpleks metode. Takođe, određene su i optimalne stategije za obe agencije, ali je određen i bonitet koji će biti dat turističkoj agenciji „Aster travel“ ukoliko i ona i organizator izaberu optimalne strategije.

Stoga, na osnovu izloženog problema konstruisana je relevantna matrica plaćanja, pri čemu su vrednosti u matrici izražene u %.

Tabela 1. Matrica plaćanja

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | | Receptivna turistička agencija „Yalos Tours“ iz Grčke (igrač *B*) | | | |
| „Aster travel“ (Igrač *A*) |  | | *b1* | *b2* | *b3* | *b4* |
| Hoteli sa 4\* | Hoteli sa 3\* | Garni hoteli | Vile i apartmani |
| *a1* | Paralija | 10 | 8 | 5 | 10 |
| *a2* | Olimpik Bič | 7 | 4 | 5 | 4 |
| *a3* | Leptokarija | 9 | 10 | 11 | 5 |
| *a4* | Hanioti | 11 | 9 | 5 | 7 |
| *a5* | Nei Pori | 5 | 4 | 5 | 3 |

Za tako definisanu početnu matricu plaćanja, procesom redukcije, problem matrične igre sveden je sa dimenzija 5x4 na dimenziju 3x3, na način da su međusobnim poređenjem alternativa prema igračima eliminisane sve irelevantne strategije, koje kao takve nikada ne bi bile izabrane za optimalne od strane ova dva igrača. Postupak redukcije izvršen je po igraču *A* na sledeći način:

=>(27)

*a*1≥ *a*5

nije *a*3≥ *a*4 i

nije *a*4≥ *a*3

nije *a*1≥ *a*3 i

nije *a*3≥ *a*1

nije *a*1≥ *a*4 i

nije *a*4≥ *a*1

*a*1 ≥ *a*2

Postupak redukcije sproveden po igraču *B* izvršen je vrlo sličnom metodologijom, s tim što su sada eliminisane alternative sa većim ishodima, s obzirom na to da drugi igrač teži da minimizira svoje plaćanje:

=> (28)

nije *b*1≤ *b*2 i

nije *b*2≤ *b*1

nije *b*3≤ *b*4 i

nije *b*4≤ *b*3

nije *b*2≤ *b*3 i

nije *b*3≤ *b*2

nije *b*2≤ *b*4 i

nije *b*4≤ *b*2

nije *b*1≤ *b*3 i

nije *b*3≤ *b*1

*b*4 ≤ *b*1

U daljem postupku, za redukovanu matricu plaćanja neophodno je odrediti gornju i donju vrednost matrične igre primenom Valdovih kriterijuma, odnosno proveriti da li je u domenu prostih matričnih igara i ima *sedlastu tačku[[2]](#footnote-2)* [11].

Tabela 2. Određivanje sedlaste tačke

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | | | Receptivna turistička agencija „Yalos Tours“ iz Grčke (igrač *B*) | | | | |
| „Aster travel“ (Igrač *A*) |  | | | *(q1)* | *(q2)* | *(q3)* | minj | maxi{minj} |
| *b1* | *b2* | *b3* |
| Hoteli sa 3\* | Garni hoteli | Vile i apartmani |
| *(p1)* | *a1* | Paralija | 8 | 5 | 10 | 5 | 5 |
| *(p2)* | *a2* | Leptokarija | 10 | 11 | 5 | 5 |
| *(p3)* | *a3* | Hanioti | 9 | 5 | 7 | 5 |
| maxi | | | 10 | 11 | 10 |  | |
| minj{maxi} | | | 10 | | |

Kako u ovom slučaju ne postoji sedlasta tačka, može se zaključiti da se rešavanje problema nalazi u domenu mešovitih matričnih igara višeg reda (3x3), pri čemu se vrednost igre kreće u opsegu 5 ≤ *v* ≤ 10. Za konkretno izračunavanje vrednosti igre i određivanje optimalnih strategija za oba igrača neophodno je primeniti metod linearnog programiranja i postaviti adekvatan matematički model prema jednom od učesnika igre. Matematički model neuporedivo je lakše definisati za igrača *B*, s obzirom da se u postupku primene Simpleks metodologije uvode samo dopunske promenjive. Dati model prikazan na sledeći način:

Funkcija cilja: *q*1 + *q*2 + *q*3 = 1 (29)

Ograničenja: 8*q*1 + 5*q*2 + 10*q*3 ≤ *v*

10*q*1 + 11*q*2 + 5*q*3 ≤ *v*

9*q*1 + 5*q*2 + 7*q*3 ≤ *v*

Pošto se funkcija cilja i ograničenja podele sa vrednošću igre *v*, dobija se:

Funkcija cilja: (30)

Ograničenja:

Uvođenjem smene:

(31)

dobija se sledeći matematički model linearnog pogramiranja:

(32)

Pošto se izvrši prilagođavanje matematičkog modela za primenu Simpleks metode linearnog programiranja, dobija se:

(33)

Kroz tri iteracije došlo se i do odgovarajućeg relevantnog rešenja postavljenog problema:

Tabela 3. Početna simpleks tabela ST\_0

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| C | | | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |  |  |  |
| Cb | Xb | B | *x*1 | *x*2 | *x*3 | *x*4 | *x*5 | *x*6 |
| 0 | *x*4 | 1 | 8 | 5 | 10 | 1 | 0 | 0 | 0,125 | 0,200 | 0,100 |
| 0 | *x*5 | 1 | 10 | 11 | 5 | 0 | 1 | 0 | 0,100 | 0,091 | 0,200 |
| 0 | *x*6 | 1 | 9 | 5 | 7 | 0 | 0 | 1 | 0,111 | 0,200 | 0,143 |
| *Fj - Cj* | | 0 | -1 | -1 | -1 | 0 | 0 | 0 | *Fj - Cj(I)* = 0-(-1•0,100) = 0,1 | | |

Iz Table ST\_0 jasno se može uočiti da će u bazu u narednoj iteraciji ući promenjiva *x1*, a izaći promenjiva *x5*.

Tabela 4. Simpleks tabela nakon prve iteracije ST\_1

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| C | | | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |  |
| Cb | Xb | B | *x*1 | *x*2 | *x*3 | *x*4 | *x*5 | *x*6 |
| 0 | *x*4 | 0,2 | 0 | -3,8 | 6 | 1 | -0,8 | 0 | 0,033 |
| 1 | *x*1 | 0,1 | 1 | 1,1 | 0,5 | 0 | 0,1 | 0 | 0,200 |
| 0 | *x*6 | 0,1 | 0 | -4,9 | 2,5 | 0 | -0,9 | 1 | 0,040 |
| *Fj - Cj* | | 0,1 | 0 | 0,1 | -0,5 | 0 | 0,1 | 0 | *Fj - Cj(II)* = 0,1-(-0,5•0,033) 0,12 |

Iz Table ST\_1 jasno se može uočiti da će u bazu u narednoj iteraciji ući promenjiva *x3*, a izaći promenjiva *x4*.

Tabela 5. Simpleks tabela nakon druge iteracije ST\_2

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| C | | | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |  |
| Cb | Xb | B | *x*1 | *x*2 | *x*3 | *x*4 | *x*5 | *x*6 |
| 1 | *x*3 | 0,033 | 0 | -0,633 | 1 | 0,167 | -0,133 | 0 | - |
| 1 | *x*1 | 0,083 | 1 | 1,417 | 0 | -0,083 | 0,167 | 0 | 0,059 |
| 0 | *x*6 | 0,017 | 0 | -3,317 | 0 | -0,417 | -0,567 | 1 | - |
| *Fj - Cj* | | 0,116 | 0 | -0,216 | 0 | 0,084 | 0,034 | 0 | *Fj - Cj(III)* = 0,116-(-0,216•0,059) 0,13 |

Iz Table ST\_2 jasno se može uočiti da će u bazu u narednoj iteraciji ući promenjiva *x2*, a izaći promenjiva *x1*.

Tabela 6. Simpleks tabela nakon treće iteracije ST\_3

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| C | | | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| Cb | Xb | B | *x*1 | *x*2 | *x*3 | *x*4 | *x*5 | *x*6 |
| 1 | *x*3 | 0,070 | 0,447 | 0 | 1 | 0,130 | -0,059 | 0 |
| 1 | *x*2 | 0,059 | 0,706 | 1 | 0 | -0,059 | 0,117 | 0 |
| 0 | *x*6 | 0,211 | 2,341 | 0 | 0 | -0,611 | -0,176 | 1 |
| *Fj - Cj* | | 0,129 | 0,153 | 0 | 0 | 0,071 | 0,058 | 0 |

Optimalno rešenje primarnog modela je: *X*\* = [0; 0,059; 0,070; 0; 0; 0,211]. Maksimalna vrednost funkcije cilja iznosi: *max*F(*x*) = 0,129. Kako važi da je *max*F(*x*) = 1/*v*, onda se lako može dobiti i vrednost matrične igre:

S obzirom na ranije uvedenu smenu: , iz koje se određuje: , dobijaju se sl. vrednosti vektora *Q*\*:

*q*1 = *v* • *x*1 = 7,752 • 0 = 0

*q*2 = *v* • *x*2 = 7,752 • 0,059 = 0,457368 0,46

*q*3 = *v* • *x*3 = 7,752 • 0,070 = 0,54264 0,54

pa je: *Q*\* = (*q*1\*, *q*2\*, *q*3\*, *q*4\*) = (0; 0; 0,46; 0,54).

Optimalno rešenje dulanog problema je: *Y*\* = [0,071; 0,058; 0; 0,153; 0; 0]. Pošto je izvršena smena u matematičkom modelu za prvog igrača: , dobija se da je: . Tada se vrednosti vektora *P*\* dobijaju na sledeći način:

*p*1 = *v* • *y*1 = 7,752 • 0,071 = 0,550392 0,55

*p*2 = *v* • *y*2 = 7,752 • 0,058 = 0,449616 0,45

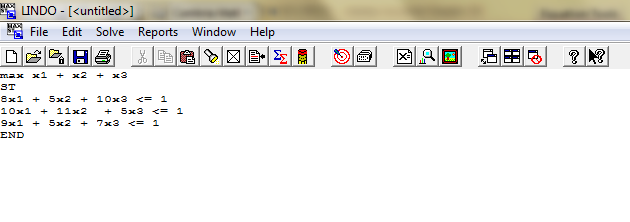
*p*3 = *v* • *y*3 = 7,752 • 0 = 0

pa je: *P*\* = (*p*1\*, *p*2\*, *p*3\*, *p*4\*) = (0,55; 0; 0,45; 0; 0).

3.2. Rešavanje definisanog problema primenom programskog paketa LINDO

Kako se postavljeni problem iz domena linearnog programiranja može na vrlo jednostavan način rešiti i primenom programskog paketa Lindo, a u cilju ukazivanja na gotovo identične rezultate koji bi se njime dobili, izvršeno je i softversko rešavanje postavljenog praktičnog primera prema igraču *B*.

Izgled ekrana sa prethodno determinisanim matematičkim modelom za receptivnu turističku agenciju, uz primenjenu Lindo sintaksu, dat je na Slici 1.



**Slika 1.** Matematički model igrača *B* definisan u Lindo programu

Na osnovu problema koji je definisan na prethodnoj slici, proračunom u Lindo softveru dobijaju se sledeći rezultati predočeni na Slici 2.

Na osnovu tih rezultata, jasno se vidi da je optimalno rešenje primarnog modela: *X*\* = [0; 0.058824; 0.070588; 0; 0; 0.211765], što je veoma približno vrednostima dobijenim gore primenjenom Simpleks metodologijom. Maksimalna vrednost funkcije cilja vrlo je identična i iznosi: *max*F(*x*) = 0.1294118. Odatle sledi da je vrednost matrične igre jednaka:

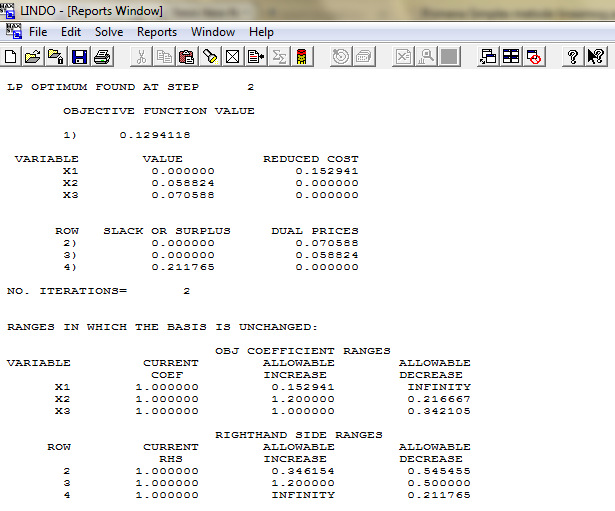
S obzirom na ranije uvedenu smenu: , iz koje se određuje: , sada se dobijaju sledeće vrednosti vektora *Q*\*:

*q*1 = *v* • *x*1 = 7,727271 • 0 = 0

*q*2 = *v* • *x*2 = 7,727271 • 0.058824 0,454548989 0,45

*q*3 = *v* • *x*3 = 7,727271 • 0.070588 0,545452605 0,55

pa je: *Q*\* = (*q*1\*, *q*2\*, *q*3\*, *q*4\*) = (0; 0; 0,45; 0,55).



**Slika 2.** Rezultati primene Lindo programa za matematički model igrača *B*

Sa Slike 2. jasno se mogu uočiti i rešenja dualnog modela, koji u ovom slučaju karakteriše igrača *A*. Naime, optimalno rešenje dualnog modela je: *Y*\* = [0.070588; 0.058824; 0; 0.152941; 0; 0]. Pošto je izvršena smena u matematičkom modelu za prvog igrača: , dobija se da je: . Sada su vrednosti vektora *P*\* vrlo identične onim vrednostima koje su dobijene primenom Simpleks metode linearnog programiranja:

*p*1 = *v* • *y*1 = 7,727271 • 0.070588 = 0,545452605 0,55

*p*2 = *v* • *y*2 = 7,727271 • 0.058824 = 0,454548989 0,45

*p*3 = *v* • *y*3 = 7,727271 • 0 = 0

pa je: *P*\* = (*p*1\*, *p*2\*, *p*3\*, *p*4\*) = (0,55; 0; 0,45; 0; 0).

**4. DISKUSIJA REZULTATA**

Na osnovu dobijenih rezultata prethodno definisanog problema, koji se vrlo često javlja u turizmu, jasno se može zaključiti da bonitet koji turistička agencija „Aster travel“ dobija u slučaju da budu izabrane optimalne strategije oba igrača iznosi 7,752 8% u slučaju primene Simpleks metodologije, ili 7,727271 8% u slučaju primene Lindo programskog paketa.

Da bi borska putnička agencija dobila maksimalni mogući popust, neophodno je da sa receptivnom turističkom agencijom „Yalos Tours“ iz Grčke ugovori 55% kapaciteta u Paraliji i 45% smeštajnih kapaciteta u Leptokariji. Divergentnost u dobijenim rezultatima primenom dva različita pristupa rešavanja zadatka u ovom slučaju je minimalna.

Sa druge strane, prema rezultatima Simpleks metode, optimalna strategija organizatora iz Grčke je da ugovori sa borskom poslovnicom 46% smeštaja turista u garni hotelima i 54% smeštaja turista u vilama i apartmanima. Nasuprot tome, Lindo paket generisao je sledeće, minimalno različite rezultate: 45% smeštaja turista u garni hotelima i 55% smeštaja turista u vilama i apartmanima

Od ovako organizovanog letovanja, očito je da bi turistička agencija „Aster travel“, vođena rezultatima Simpleks metode, u Paraliji trebalo da ugovori 25,3% ležajeva u garni hotelima i 29,7% ležajeva u vilama i apartmanima, dok bi u Leptokariji trebalo da ugovori 20,7% ležajeva u garni hotelima i 24,3% ležajeva u vilama i apartmanima. Na ovaj način izvršila bi se dobra organizacija letovanja domaćih turista u predstojećoj sezoni 2016/2017, a da se pritom ostvari makar najminimalniji mogući dobitak, dat kroz odgovarajući procenat boniteta.

Ako bi se, pak, agencija vodila rešenjima dobijenim putem Linda, način organizovanja bio bi gotovo isti, s tim da bi u Paraliji trebalo da ugovori 24,75% ležajeva u garni hotelima i 30,25% ležajeva u vilama i apartmanima, dok bi u Leptokariji trebalo da ugovori 20,25% ležajeva u garni hotelima i 24,75% ležajeva u vilama i apartmanima.

Tabela 7. Način organizovanja letovanja za predstojeću sezonu na osnovu rezultata Simpleks metode

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Organizacija letovanja 2016/2017. | | | | Receptivna turistička agencija „Yalos Tours“ iz Grčke (igrač *B*) | | | | |
| „Aster travel“ (Igrač *A*) |  | | | **(*q*1 = 0)** | **(*q*2 = 0)** | **(*q*3 = 0,46)** | **(*q*4 = 0,54)** | Σ |
| *b1* | *b2* | *b3* | *b4* |
| Hoteli sa 4\* | Hoteli sa 3\* | Garni hoteli | Vile i apartmani |
| **(*p*1 = 0,55)** | *a1* | Paralija | - | - | 25,3 | 29,7 | 55 |
| **(*p*2 = 0)** | *a2* | Olimpik Bič | - | - | - | - | - |
| **(*p*3 = 0,45)** | *a3* | Leptokarija | - | - | 20,7 | 24,3 | 45 |
| **(*p*4 = 0)** | *a4* | Hanioti | - | - | - | - | - |
| **(*p*5 = 0)** | *a5* | Nei Pori | - | - | - | - | - |
| Σ | | | - | - | 46 | 54 | 100 |

Tabela 8. Način organizovanja letovanja za predstojeću sezonu na osnovu rezultata Lindo programskog paketa

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Organizacija letovanja 2016/2017. | | | | Receptivna turistička agencija „Yalos Tours“ iz Grčke (igrač *B*) | | | | |
| „Aster travel“ (Igrač *A*) |  | | | **(*q*1 = 0)** | **(*q*2 = 0)** | **(*q*3 = 0,45)** | **(*q*4 = 0,55)** | Σ |
| *b1* | *b2* | *b3* | *b4* |
| Hoteli sa 4\* | Hoteli sa 3\* | Garni hoteli | Vile i apartmani |
| **(*p*1 = 0,55)** | *a1* | Paralija | - | - | 24,75 | 30,25 | 55 |
| **(*p*2 = 0)** | *a2* | Olimpik Bič | - | - | - | - | - |
| **(*p*3 = 0,45)** | *a3* | Leptokarija | - | - | 20,25 | 24,75 | 45 |
| **(*p*4 = 0)** | *a4* | Hanioti | - | - | - | - | - |
| **(*p*5 = 0)** | *a5* | Nei Pori | - | - | - | - | - |
| Σ | | | - | - | 45 | 55 | 100 |

**5. ZAKLJUČAK**

Na osnovu rezultata dobijenih pri rešavanju praktičnog primera definisanog u domenu mešovitih matričnih igara višeg reda, jasno se može zaključiti koliki značaj ima primenjena Simpleks metodologija linearnog programiranja.

Naime, lako je uočljivo da su oba modela korišćena za izračunavanje optimalnih strategija dva igrača međusobno povezana, kao i da su jedan drugom dualni. Time je jasno predočeno da se rešavanje antagonističke igre može svesti praktično na rešavanje para dualnih problema linearnog programiranja, a da pritom nije potrebno svaki od njih rešavati zasebno.

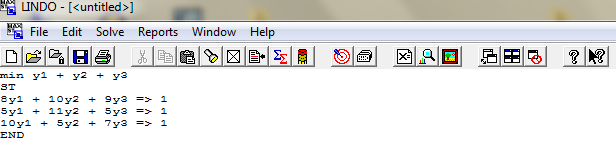
Takođe, može se zaključiti i da se mešovite matrične igre mogu koristiti u različitim oblastima u kojima je neophodno doneti odgovarajuće odluke, koje mogu biti vezane za brojne aspekte ljudskog delovanja, i gde se, realno gledano, mogu javiti međusobno suprostavljene strane, kao potencijalni učesnici igre.

Vredan zaključak može se izvući i iz primenjena dva načina rešavanja postavljenog problema, koji su dali gotovo identične rezultate. Naime, Simpleks metoda linearnog programiranja imala je gotovo minimalna odstupanja u svojim rešenjima u odnosu na Lindo programski paket, a kao očigledan razlog tome izdvaja se zaokruživanje vrednosti dobijenih veličina na tri decimale.

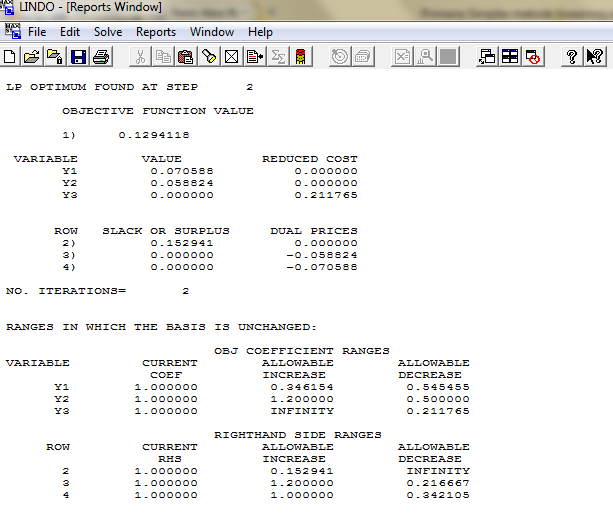
Sumarno gledano, jasno je da je kroz ovaj rad prikazana samo još jedna od mnogobrojnih oblasti gde je linearno programiranje, tj. Simpleks metoda linearnog programiranja našla svoju primenu u postupku analize i matematičkog rešavanja prethodno ustrojenog problema. Njome su izvedeni zaključci i definisane optimalne strategije na osnovu kojih oba igrača mogu realizovati svoje interese na odgovarajući način.

**6. DODATAK**

U cilju što potpunije analize posmatranog problema, a kako bi se ukazalo na gotovo identične rezultate koji se dobijaju pri različitim načinima njegovog rešavanja, izvršena je softverska analiza postavljenog praktičnog primera, i to prema igraču *A*. Sama postavka modela u Lindo programu i relevantni rezultati dobijeni iz tog modela dati su na Slikama 3. i 4.



**Slika 3.** Matematički model igrača *A* definisan u Lindo programu



**Slika 4.** Rezultati primene Lindo programa za matematički model igrača *A*

Iz ovih rezultata jasno se može uvideti da će vrednost igre i optimalne strategije ostati nepromenjene, bez obzira na to za kog igrača se vrši analiza putem Linda. Na ovaj način još jednom je dokazano da su matematički modeli igrača *A* i igrača *B* jedan drugome dualni i da će se uvek na kraju dobiti ista rešenja.

**LITERATURA**

**[1]** Ghadle, P., K., Pawar, S., T. (2014): Game Theory problems by an alternative Simplex method, *International Journal of Research in Engineering and Technology* 3(5), R.V College of Engineering, Bangalore, India, pp. 900-905

**[2]** Jovanović**,** I. (2016): *Operaciona istraživanja II -* *teorija igara*, Autorizovana predavanja, Tehnički fakultet u Boru, Bor, p. 2, 24, 25, 29, 46-49

**[3]** Fernandez, F., R., Puerto, J. (1996): Vector Linear Programming in Zero-Sum Multicriteria Matrix Games, *Journal of Optimization Theory and Applications* 89(1), Springer Verlag, Berlin, Nemačka, pp. 115-127

**[4]** Pavličić, D. (2007): *Teorija odlučivanja*, Ekonomski fakultet u Beogradu, Beograd, p. 219

**[5]** Petković, N. (2016): *Matematički modeli optimizacije poslovnih procesa*, Doktorska disertacija, Fakultet za menadžment, Zaječar, p. 79

**[6]** Jovanović, A. (2005): *Metode operacionih istraživanja*, Tehnički fakultet u Boru, Bor, p. 173, 178

**[7]** Stojanović, B. (2004): Uspostavljanje konvencija – primena teorije igara, *Sociološki pregled* 38(3), Srpsko sociološko društvo, Beograd, pp. 373-395

**[8]** Ferguson, S., T. (2014): *Game Theory*, Mathematics Department, University of California, Los Angeles, pp. 9-16

**[9]** Dantzig, G., B. (1963): *Linear Programming and Extensions,* Princeton University Press, New Jersey, USA, p. 28

**[10]** Sampras, N., Sifelaras, A. (2009): A primal-dual exterior point algorithm for linear programming problems, *Yugoslav Journal of Operations Research* 19(1), Fakultet organizacionih nauka, Beograd, pp. 123-132

**[11]** Duffy, J. (2015): *Game Theory and Nash Equilibrium,* Lakehead University, Ontario, Canada, p. 6

**[12]** Waner, S. (2007): *Game Theory - Saddle Point & Strictly Determined Game*,[Internet], Dostupno na: <http://www.zweigmedia.com/RealWorld/Summary3b.html#top>, Pristupljeno: 13.4.2017.

1. *Igra sa nultim zbirom* podrazumeva da je iznos dobitka jednog igrača jednak vrednosti gubitka (plaćanja) drugog. [↑](#footnote-ref-1)
2. Sedlasta tačka je element matrice plaćanja koji ispunjava uslov da je najmanji element svoga reda, a u isto vreme i najveći element svoje kolone [12]. Sedlasta tačka predstavlja izraz jednakosti za gornju i donju graničnu vrednost proste matrične igre, a ujedno definiše i optimalne strategije za oba igrača. [↑](#footnote-ref-2)