Sadržaj

TRANSPORTNI PROBLEM

TRANSPORTNI PROBLEM

1. Uvod

Izučavanje problema transporta primenom analitičkih metoda datira iz perioda pedesetih godina prošlog veka. Naziv potiče još iz vremena njegovog postanka 1941. godine kada su transportni problemi poslužili da se konstruiše prvi od matematičkih problema u linearnom programiranju, koji se kasnije primenjivao u raznim oblastima ljudske delatnosti. Neki specijalni slučajevi transportnog zadatka su izučavani još pre pojave radova iz linearnog programiranja. Transportni zadatak je prvi put uočen u radovima ruskog matematičara L.V. Kantoroviča "Matematičke metode u organizaciji i planiranju proizvodnje" iz 1939. godine. Prvu strogu formulaciju transportnog zadatka dao je američki matematičar F.F. Hitchcook. Dantzig je 1951. zasnovao metod za rešavanje transportnog zadatka koje je baziran na simpleks metodu. Već u periodu 1953-1955. nastali su novi metodi za rešavanje transportnog zadatka koji su mnogo efikasniji od simpleks metoda.

Razvojem metodologije LP pokazano je da su transportni problemi specijalan slučaj zadataka LP, bez obzira što su neki od njih ranije postavljeni i rešeni. Specifičnost transportnih problema kao zadataka LP ne ogleda se na funkciji cilja $F(x)$ već u skupu ograničenja L, gde se pojavljuju izvesna uprošćenja koeficijenata matrice A skupa ograničenja, koji se za razliku od drugih slučajeva, izražavaju u vrednostima nula ili jedan.

Analitički metodi transporta u najvećem broju slučajeva vezuju se za izbor najpovoljnije varijante transporta pri kojoj su troškovi minimalni u odnosu na određenu saobraćajnu mrežu i transportna sredstva. Danas to više nisu jedini zadaci koji se rešavaju kao transportni problemi. Sve češće se tome podvrgavaju i zadaci optimalnog razmeštaja mašina, postrojenja, pomoćnih službi, skladišta, servisa ili energetskih objekata, zadaci raspodele prevoznih sredstava na korisnike, zadaci optimalne lokacije novih pogona, zadaci najpovoljnijeg izbora radnika za obavljanje određenih poslova, i drugog sa ciljem postizanja veće ekonomičnosti rada i vremena. Sve su to zadaci koji se svode na rešavanje različitih varijanti transportnog problema. Mnoga specifična pitanja ovog problema još uvek su prisutna u velikom broju naučnih rasprava i radova koji se bave praktičnom primenom analitičkih metoda kod rešavanja transportnih problema.

Može se istaći da je u svim ovim problemima zajedničko sledeće:

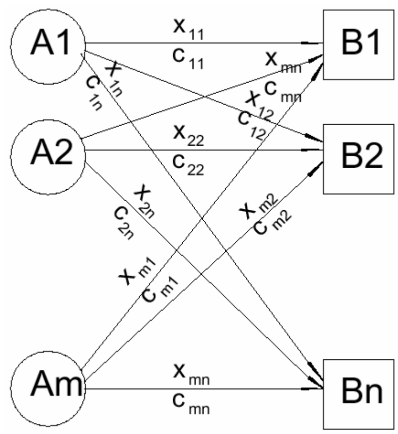
- uvek se radi o prevozu (ili raspodeli) jednog homogenog proizvoda,
- transport se vrši iz više izvora na veći broj lokacija,
- pronađeno rešenje je optimalno za sve učesnike, posmatrane zajedno.

Transportni problem (TP) linearnog programiranja je problem minimizacije ukupnih troškova transporta: resursa, putnika, energije, informacije itd.

U osnovnom modelu TP pretpostavka je da su poznati:

- količina resursa koju poseduju izvori (proizvođači, centri ponude, ishodišta, magacini, skladišta, otpremne stanice), a koji je po svojoj prirodi jednorodna (homogena),
- količina resursa koju potražuju ponori (potrošači, primaoci, prodavnice, odredišta, prijemne stanice i slično), koju je potrebno distribuirati, a koja je po svojoj prirodi takođe jednorodna (homgena),
- cene transporta po jedinici robe od određenog izvora do određenog odredišta.

Šematski, zatvoren oblik transportnog problema može se prikazati kao na slici II-1.



Slika II-1. Šematski prikaz zatvorenog transportnog problema

2. Opšti model transportnog zadatka

Transportnim zadatkom se može odrediti optimalan plan prevoženja jedne vrste robe ako je dato:

- broj otpremnih stanica (OS) – izvora, proizvodnih stanica ili centara, odakle treba organizovati prevoz robe,
- broj prijemnih stanica (PS) – ponora, potrošačkih stanica ili centara, u koje treba dopremiti robu iz otpremnih stanica,
- ukupna količina robe koju treba prevesti iz otpremnih u prijemne stanice,
- cene prevoza po jedinici robe od svih otpremnih do svih prijemnih stanica.

U transportnom zadatku se mogu minimizirati ukupni troškovi prevoza, vreme prevoženja, itd. Pod *optimalnim planom* prevoženja podrazumevamo onaj plan prevoženja robe od otpremnih do prijemnih stanica kojim se *minimizira* ukupna cena prevoza.

2.1. Otvoreni i zatvoreni model

Neka je dato m otpremnih i n prijemnih stanica. Otpremne stanice ćemo obeležiti slovima A_1, A_2, ..., A_m, a prijemne sa B_1, B_2, ..., B_n. Količinu robe (iste vrste) u otpremnim stanicama obeležimo sa a_1, a_2,... , a_m, a potrebe prijemnih stanica sa b_1, b_2,... , b_n. Veličine a_1, a_2,... , a_m nazivaju se *ponude* otpremnih stanica, a veličine b_1, b_2,... , b_n *potražnje* prijemnih stanica. Ukoliko ove veličine, koje mogu biti izražene u nekim jedinicama (kilogramima, tonama, vagonima, kilometrima i dr.), zadovoljavaju jednakost:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{2.1.1}$$

onda se transportni zadatak naziva *zatvorenim*. Ako je ukupna ponuda robe u otpremnim stanicama veća od ukupne potražnje te robe u prijemnim stanicama, ili obrnuto, transportni zadatak se naziva *otvorenim*.

Označimo sa c_{ij}, i=1,..., m, j=1,..., n cenu prevoza jedinice robe između stanica A_i i B_j, a sa x_{ij} - broj jedinica robe koje treba prevesti iz A_i u B_j. Za ovako formulisan zatvoren model transportnog zadatka, podaci se mogu prikazati tabelarno, kao što je prikazano u tabeli II-1. Tabela sadrži sve podatke koji definišu transportni problem, a na osnovu kojih se može formirati opšti matmatički model transportnog problema.

Tabela II-1. Opšti model zatvorenog transportnog zadatka

	PS	$\boldsymbol{B_1}$	$\boldsymbol{B_2}$	...	$\boldsymbol{B_n}$
OS	$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$	$\boldsymbol{b_1}$	$\boldsymbol{b_2}$	...	$\boldsymbol{b_n}$
$\boldsymbol{A_1}$	$\boldsymbol{a_1}$	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}
$\boldsymbol{A_2}$	$\boldsymbol{a_2}$	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}
...	...	...	...	...	...
$\boldsymbol{A_m}$	$\boldsymbol{a_n}$	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}

Otpremne stanice (OS) i njihove ponude naznačene su u pretkoloni, a prijemne stanice (PS) i njihove potražnje u zaglavlju tabele II-1. U levim gornjim uglovima polja ove tabele unete su cene prevoza c_{ij}, a u desnim donjim uglovima - veličine prevoza x_{ij}.

U tabelama II-2 i II-3 prikazane su još neke varijante ispisivanja ovako formulisanog zatvorenog transportnog zadatka.

Tabela II-2. Opšti model zatvorenog transportnog zadatka–drugi način prikazivanja

Proizvođači	**Potrošači**				**Kapaciteti**
	P_1	P_2	...	P_n	
I_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
I_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...
I_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m
Potražnja	b_1	b_2	...	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

Tabela II-3. Opšti model zatvorenog transportnog zadatka–treći način prikazivanja

Potrošači / **Proizvođači**	P_1 (b_1)	P_2 (b_2)	...	P_n (b_n)
I_1 (a_1)	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}
I_2 (a_2)	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}
...	...	...	...	...
I_4 (a_m)	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}

gde su:

x_{ij} – količina resursa koja treba da se transportuje od I_i do P_j
c_{ij} – jedinična cena transporta od I_i do P_j
I_i – izvori, proizvođači, ishodišta, centri ponude, otpremne stanice (OS)
P_j – ponori, potrošači, odredišta, potrošački centri, prijemne stanice (PS)
a_i – kapacitet *i*-tog izvora, ishodišta
b_j – kapacitet *j*-tog ponora, odredišta

Veličine x_{ij}, $i = 1,..,m$, $j = 1,...,n$ čine dopustivi plan prevoženja ako zadovoljavaju ograničenja:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = 1,...,m \tag{2.1.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = 1,...,n \tag{2.1.3}$$

$$x_{ij} \geq 0,\ i = 1,...,m,\quad j = 1,...,n \tag{2.1.4}$$

Teorema 2.1.1. Uslov (2.1.1) je potreban i dovoljan uslov da sistem jednačina (2.1.2) i (2.1.3) bude saglasan.

Dokaz. Iz jednačina (2.1.2) i (2.1.3) sledi:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j ,$$

što označava da je uslov (2.1.1) potreban uslov za saglasnost sistema jednačina (2.1.2) i (3). Da bismo dokazali da je uslov (2.1.1) dovoljan uslov saglasnosti sistema jednačina (2.1.2) i (2.1.3), dokazaćemo da su, u slučaju da važi uslov (2.1.1), vrednosti promenljivih definisane sa:

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{\sum_{i=1}^{m} a_i}, \quad i = 1,\ldots,m, \quad j = 1,\ldots,n$$

rešenje sistema jednačina (2.1.2) i (2.1.3). Zaista, ako važi uslov (2.1.1), za ovako definisane vrednosti x_{ij} dobijamo uslov (2.1.2):

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \frac{a_i \sum_{j=1}^{n} b_j}{\sum_{i=1}^{m} a_i} = a_i$$

Analogno se dobija uslov (3):

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \frac{b_j \sum_{i=1}^{m} a_i}{\sum_{i=1}^{m} a_i} = b_j .$$

Zbog uslova (2.1.1) jednačine (2.1.2) i (2.1.3), kojih ima $m+n$, nisu nezavisne. Zaista, sabirajući jednačine (2.1.2), a zatim jednačine (2.1.3), dobijamo isti rezultat zbog uslova (1) pa znači da je broj linearno nezavisnih veza jednak $m+n$-1, pa postoji $\boldsymbol{m+n}$**-1** zavisnih promenljivih, koje ćemo zvati *bazičnim promenljivim*. Sve ostale su nezavisne i zvaćemo ih *slobodnim*. Slobodnih promenljivih ima:

$$n \cdot m - (m + n - 1) = (m - 1)\cdot(n - 1).$$

Bazične promenljive mogu da se izraze pomoću slobodnih promenljivih. Dopustivo rešenje (x_{11}, x_{12},... , x_{mn}) nazivamo *bazičnim rešenjem*, ako je u njemu broj pozitivnih veličina x_{ij} ne veći od $m+n$-1, dok su ostale promenljive x_{ij} jednake nuli. To znači da u svakom bazičnom rešenju nema više od $m+n$-1 prevoženja. Bazično rešenje nazivamo optimalnim *rešenjem* ako minimizira ukupne troškove prevoza, tj. minimizira funkciju cilja (kriterijuma):

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\ x_{ij} \tag{2.1.5}$$

Matematička formulacija postavljenog transportnog problema sastoji se u nalaženju minimuma funkcije cilja (5), a da pri tome bude zadovoljen skup ograničenja (2.1.2) i (2.1.3), tako da je:

$$
\begin{aligned}
\min \quad F(x) = \quad & c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + \ldots + c_{1n}x_{1n} + \\
& c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} + \ldots + c_{2n}x_{2n} + \\
& \ldots \\
& c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + c_{m3}x_{m3} + \ldots + c_{mn}x_{mn} +
\end{aligned}
$$

Ograničenja po redovima (kapaciteti izvora):

$$
\begin{aligned}
& x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = a_1 \\
& x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = a_2 \\
& \ldots \\
& x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = a_m
\end{aligned}
$$

Ograničenja po kolonama (kapaciteti ponora):

$$
\begin{aligned}
& x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{n1} = b_1 \\
& x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{n2} = b_2 \\
& \ldots \\
& x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{nm} = b_n.
\end{aligned}
$$

Pri tome nepoznate vrednosti koje se traže moraju biti nenegativne $x_{ij}>=0$, zato što se radi o fizičkim veličinama, odnosno o količinama transportovanog materijala.

Teorema 2.1.2. Svaki transportni zadatak (2.1.1)**-**(2.1.5) sadrži optimalno rešenje.

Dokaz. Kako je skup dopustivih rešenja konačan, to funkcija cilja (ukupni troškovi prevoza) mora u jednom od tih rešenja da uzme najmanju vrednost.

Teorema 2.1.3. Ako su veličine a_i i b_j, $i = 1,..., m$, $j = 1,..., n$ celi brojevi, onda su i bazične promenljive u proizvoljnom rešenju takođe celi brojevi.

Formulišući zadatak transportnog problema, koji je zatvorenog tipa, pretpostavili smo da je ukupna ponuda svih proizvođača jednaka ukupnim potrebama svih potrošača. Ukoliko je ta pretpostavka narušena, tj. da su ukupne ponude svih proizvođača veće nego što je konzumna moć svih potrošača, ili obrnuto, radi se o otvorenom transportnom problemu.

Pretpostavka o ovoj nejednakosti uopšte ne smanjuje opštost transportnog problema i mogućnost njegove primene. Otvoreni transportni model se, uvodenjem jedne nove kolone ili novog reda, jednostavno prevodi u zatvoreni transportni model. Kod svođenja otvorenog na zatvoreni model, postupa se na sledeći način:

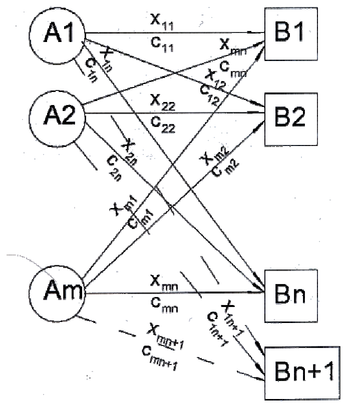
Ako je ukupna ponuda proizvođača veća od ukupne tražnje potrošača, tj. ako je:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{2.1.6}$$

tada se postojećim odredištima dodaje još jedno, nepostojeće odredište, sa potražnjom koja je jednaka:

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{7}$$

Šematski prikaz otvorenog transportnog problema, gde su ukupne ponude svih proizvođača veće nego što je konzumna moć svih potrošača, dat je na slici II-2.



Slika II-2. Otvoreni model transportnog problema (ponuda veća od potražnje)

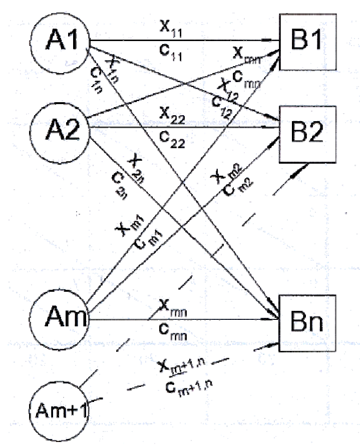
Ukoliko je ukupna tražnja potrošača veća od ukupne ponude proizvođača, tj.:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{2.1.8}$$

tada se postojećim proizvođačima dodaje jedan nepostojeći proizvođač, sa ponudom koja je jednaka:

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i \tag{2.1.9}$$

Šematski prikaz otvorenog transportnog problema, gde su ukupne ponude svih proizvođača manje nego što je konzumna moć svih potrošača, dat je na slici II-3.



Slika II-3. Otvoreni model transportnog problema (potražnja veća od ponude)

Na ovaj način obezbeđena je tražena jednakost, pa se može rešiti transportni problem. Naravno, transportni troškovi do nepostojećih potrošača, odnosno od nepostojećih proizvođača, uvek će biti jednaki nuli, tj. biće:

$$C_{i,\,n+1} = 0, i = 1,2,...,m \tag{2.1.10}$$

ili

$$C_{m+1,\ j} = 0, \qquad j = 1,2,...,n.$$

Iz napred formulisanog opšteg modela transportnog problema (TP) očigledno je da se radi o problemu linearnog programiranja. To dalje znači da se ovaj problem može rešiti već poznatom simpleks metodom. Međutim, specijalna struktura transportnog problema omogućuje da se problem reši mnogo jednostavnijim postupkom. Posmatranjem matrice sistema ograničenja transportnog problema, može se videti da su svi koeficijenti uz nepoznate jedinice. Dalje, kako se svaka nepoznata x_{ij} pojavljuje samo u dve jednačine, to matrica, pored jedinica, sadrži i veliki broj nula, sto dalje pojednostavljuje postupak rešavanja transportnog problema.

Pored primarnog transportnog problema, formulisanog matematičkim modelom (2.1.2) do (2.1.5), može se formulisati i njemu odgovarajući ***dualni problem***. Nepoznate u dualnom problemu označićemo sa:

$$u_i, \qquad i = 1, 2,..., m$$
$$v_j, \qquad j = 1, 2,..., n$$

Pa model dualnog problema ima *funkciju cilja* (kriterijuma):

$$\max G(\mathrm{x}) = \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j \cdot v_j \tag{2.1.11}$$

i sistem *ograničenja*:

$$u_i + v_j \le c_{ij},\ \ i= 1,2,..,m;\ \ j= 1,2,...,n \tag{2.1.12}$$

Kako sistem ograničenja primarnog problema sadrži samo jednačine, to nema nikakvih ograda u pogledu vrednosti dualnih promenljivih, tj. one mogu biti i negativne. Međutim, na osnovu veze, koja postoji između realnih promenljivih jednog problema i izravnavajućih promenljivih drugog problema, sistem ograničenja (2.1.12) može se razložiti na dva podsistema. Tako dobijamo sledeći sistem ograničenja dualnog problema:

$$\text{za}\ \ x_{ij} > 0,\ \ u_i + v_j = c_{ij}, \tag{2.1.13}$$

$$\text{za}\ \ x_{ij} = 0,\ \ u_i + v_j \le c_{ij}, \tag{2.1.14}$$

Kada levoj strani nejednačine (14) dodamo izravnavajuću dualnu promenljivu Δ_{ij}, pa dobijenu jednačinu rešimo po promenljivoj Δ_{ij}, dobijamo:

$$\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j),\ \ \text{za}\ x_{ij} = 0. \tag{2.1.15}$$

Relacija (2.1.15) biće korišćena prilikom pronalaženja optimalnog rešenja transportnog problema, pa će se onda ukazati na njen značaj i funkciju.

Zatvoreni model transportnog zadatka je najjednostavniji slučaj transportnih zadataka linearnog programiranja. Druge varijante transportnog zadatka zasnivaju se na zatvorenom modelu.

3. Određivanje početnog (baznog) rešenja

Rešavanja transportnog zadatka svodi se na određivanje početnog (baznog) rešenja, pomoću jednog od poznatih računskih postupaka – algoritama. To čini prvu etapu u rešavanju transportnog zadatka. Ako se u ovoj prvoj etapi ne dobije optimalno rešenje, prelazi se na drugu etapu. U drugoj etapi se određenim iterativnim postupkom, pomoću algoritma za nalaženje optimalnog rešenja, poboljšava početno rešenje tako što se prelazi sa prvog bazičnog rešenja na bazična rešenja koja su bliža optimalnom rešenju, sve dok se ne dobije optimalno rešenje. Razvijeni su i algoritmi kod kojih nije potrebno pronalaziti početno rešenje, ono je već optimalno.

Postoji više metoda za određivanje početnog bazičnog rešenja, kao što su:

1. dijagonalni metod – pravilo severozapadnog ugla – gornji levi ugao,
2. metod minimalnih cena u redovima,
3. metod minimalnih cena u kolonama,
4. metod minimalnih cena u matrici – metod (najmanjih) jediničnih koeficijenata,
5. Vogel-ov aproksimativni metod,
6. Vogel – Kordin postupak,
7. metod dvojnog prvenstva – dvostrukog precrtavanja.

3.1. Dijagonalni metod – metod severozapadnog ugla

Ovaj metod se često naziva i metod “gornji levi ugao” ili “metod severozapadnog ugla”. Detalji ovog metoda najbolje se objašnjavaju na konkretnom zadatku. U tabeli II-4 date su količine robe koje treba otpremiti iz otpremnih stanica (OS), količine robe koje se traže u prijemnim stanicama (PS), kao i cene prevoza jedinice robe od svake otpremne do svake prijemne stanice. Svako polje tabele označimo sa (i,j), $i=1, ..., m$, $j=1, ..., n$. U levom gornjem uglu svakog takvog polja (i,j) tabele upisana je cena prevoza c_{ij} -prevoza jedinice robe iz i-te otpremne u j-tu prijemnu stanicu. U desnom donjem uglu upisana je vrednost promenljive x_{ij}, tj. upisana je količina robe koju treba prevesti iz i-te otpremne u j-tu prijemnu stanicu. U našem primeru imamo m=4 otpremnih i n=5 prijemnih stanica. Ukupna količina robe koja se nudi u otpremnim stanicama je:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 36 + 23 + 29 + 12 = 100,$$

i jednaka je ukupnoj količini robe koja se traži u prijemnim stanicama:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 = 13 + 24 + 15 + 21 + 27 = 100.$$

Može se zaključiti da se radi o *zatvorenom modelu* transportnog problema, jer važi:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \ .$$

Tabela II-4. Početni problem transportnog zadatka

OS \ PS		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
	100	**13**	**24**	**15**	**21**	**27**
A_1	**36**	5	12	1	4	13
A_2	**23**	7	8	14	6	5
A_3	**29**	15	4	2	7	9
A_4	**12**	6	11	5	16	3

Prema dijagonalnom metodu najpre određujemo vrednost promenljive x_{11} kao:

$$x_{11} = \min\{a_1, b_1\} = \min\{36{,}13\} = 13.$$

Kao što vidimo, prva otpremna stanica A_1 može da isporuči 36 jedinica robe, a prva prijemna stanica traži 13 jedinica te robe. Uzimajući $x_{11} = 13$, podmirujemo potrebu prve prijemne stanice u potpunosti. Ovu vrednost za x_{11} upisujemo u donjem desnom uglu polja (1,1), kao što je prikazano u tabeli II-5.

Tabela II-5. Dijagonalni metod – određivanje početnog rešenja

OS \ PS		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
	100	**13**	**24**	**15**	**21**	**27**
A_1	**36**	5 / 13	12	1	4	13
A_2	**23**	7	8	14	6	5
A_3	**29**	15	4	2	7	9
A_4	**12**	6	11	5	16	3

Otpremna stanica A_1 može da isporuči još 36-13 = 23 jedinica robe preostalim prijemnim stanicama. Prijemnoj stanici B_2 dajemo najviše što možemo, tj. veličinu x_{12} određujemo iz jednakosti:

$$x_{12} = \min\{36-13{,}24\} = \min\{23{,}24\} = 23.$$

Na ovaj način količina robe prve otpremne stanice je iscrpljena, pa su veličine x_{13}, x_{14} i x_{15} jednake nuli. Nule iz praktičnih razloga ne upisujemo. Vrednost za x_{12} upisujemo u donjem desnom uglu polja (1,2), kao što je prikazano u tabeli II-6.

Tabela II-6. Dijagonalni metod – određivanje početnog rešenja

OS \ PS	PS	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
OS	100	13	24	15	21	27
A_1	36	5 / 13	12 / 23	1	4	13
A_2	23	7	8	14	6	5
A_3	29	15	4	2	7	9
A_4	12	6	11	5	16	3

Prva prijemna stanica je zadovoljena, a promenljive x_{2j}, j=1,2,3,4,5 u drugoj vrsti (redu) tabele, određujemo na sledeći način:

$x_{21} = 0;$
$x_{22} = \min\{23, 24\text{-}23\} = \min\{23,1\} = 1;$
$x_{23} = \min\{23\text{-}1, 15\} = \min\{22,15\} = 15;$
$x_{24} = \min\{23\text{-}1\text{-}15, 21\} = \min\{7,21\} = 7;$

Vrednost za x_{22}, x_{23}, x_{24} upisujemo u donjem desnom uglu polja (2,2; 2,3; 2,4), kao što je prikazano u tabelama II-7 – II-9.

Tabela II-7. Dijagonalni metod – određivanje početnog rešenja

OS \ PS	PS	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
OS	100	13	24	15	21	27
A_1	36	5 / 13	12 / 23	1	4	13
A_2	23	7	8 / 1	14	6	5
A_3	29	15	4	2	7	9
A_4	12	6	11	5	16	3

Tabela II-8. Dijagonalni metod – određivanje početnog rešenja

OS \ PS	PS	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
OS	100	13	24	15	21	27
A_1	36	5 / 13	12 / 23	1	4	13
A_2	23	7	8 / 1	14 / 15	6	5
A_3	29	15	4	2	7	9
A_4	12	6	11	5	16	3

Tabela II-9. Dijagonalni metod – određivanje početnog rešenja

	PS	***B_1***	***B_2***	***B_3***	***B_4***	***B_5***
OS	**100**	**13**	**24**	**15**	**21**	**27**
A_1	**36**	**5** **13**	**12** **23**	**1**	**4**	**13**
A_2	**23**	**7**	**8** **1**	**14** **15**	**6** **7**	**5**
A_3	**29**	**15**	**4**	**2**	**7**	**9**
A_4	**12**	**6**	**11**	**5**	**16**	**3**

Druga prijemna stanica je zadovoljena, a promenljive x_{3j}, j = 1, 2, 3, 4, 5 u trećoj vrsti (redu) tabele, određujemo na sledeći način:

$$x_{31} = x_{32} = x_{33} = 0;$$
$$x_{34} = \min\{29, 21\text{-}7\} = \min\{29,14\} = 14;$$
$$x_{35} = \min\{29\text{-}14, 27\} = \min\{15,27\} = 15;$$

Vrednost za x_{34} i x_{35} upisujemo u donjem desnom uglu polja (3,4; 3,5), kao što je prikazano u tabelama II-10 i II-11.

Tabela II-10. Dijagonalni metod – određivanje početnog rešenja

	PS	***B_1***	***B_2***	***B_3***	***B_4***	***B_5***
OS	**100**	**13**	**24**	**15**	**21**	**27**
A_1	**36**	**5** **13**	**12** **23**	**1**	**4**	**13**
A_2	**23**	**7**	**8** **1**	**14** **15**	**6** **7**	**5**
A_3	**29**	**15**	**4**	**2**	**7** **14**	**9**
A_4	**12**	**6**	**11**	**5**	**16**	**3**

Tabela II-11. Dijagonalni metod – određivanje početnog rešenja

	PS	***B_1***	***B_2***	***B_3***	***B_4***	***B_5***
OS	**100**	**13**	**24**	**15**	**21**	**27**
A_1	**36**	**5** **13**	**12** **23**	**1**	**4**	**13**
A_2	**23**	**7**	**8** **1**	**14** **15**	**6** **7**	**5**
A_3	**29**	**15**	**4**	**2**	**7** **14**	**9** **15**
A_4	**12**	**6**	**11**	**5**	**16**	**3**

Treća prijemna stanica je zadovoljena, a promenljive x_{4j}, j = 1, 2, 3, 4, 5 u četvrtoj vrsti (redu) tabele, određujemo na sledeći način:

$$x_{41} = x_{42} = x_{43} = x_{44} = 0;$$
$$x_{45} = \min\{12, 27\text{-}15\} = \min\{12, 12\} = 12.$$

Vrednost za x_{45} upisujemo u donjem desnom uglu polja (4,5), kao što je prikazano u tabeli II-12.

Tabela II-12. Dijagonalni metod – određivanje početnog rešenja

	PS	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
OS	100	13	24	15	21	27
A_1	36	5 / 13	12 / 23	1	4	13
A_2	23	7	8 / 1	14 / 15	6 / 7	5
A_3	29	15	4	2	7 / 14	9 / 15
A_4	12	6	11	5	16	3 / 12

Nenulte bazične promenljive, bazna polja, koncentrišu se oko glavne dijagonale u transportnoj tabeli, pa je otuda i potekao naziv "dijagonalni metod", ali isto tako ovaj pravac podseća na pravac severozapad – jugoistok, pa se nekada naziva i "metod severo-zapadnog ugla". Karakteristično je da popunjavanje tabele bazičnim promenljivim uvek počinje od polja (1,1), a završava se u polju (m,n). Da bismo istakli polja tabele u kojima su na ovaj način dobijene bazične promenljive, početno rešenje, crvenim brojevima je označena količina resursa koja treba da se transportuje iz određenih otpremnih centara do određene prijemne centre. Kao što vidimo, imamo m+n-1 = 4+5-1 = 8 "crvenih", baznih polja, tj. 8 pozitivnih promenljivih, dok su ostale promenljive jednake nuli. Prema tome, ukupni troškovi prevoza iznose:

$$F(x_0) = 5\cdot13 + 12\cdot23 + 8\cdot1 + 14\cdot15 + 6\cdot7 + 7\cdot14 + 9\cdot15 + 3\cdot12 = 870 \text{ n.j.}$$

3.2. Metod minimalnih cena u redovima

Kod ovog metoda, počinje se od prvog reda gde se uočava minimalna cena i u tom polju se postavlja maksimalna bazična vrednost, što se nastavlja i u ostalim redovima. U primeru koji je dat u tabeli II-13, vidimo da je cena c_{13} =1 najmanja, pa za promenljivu x_{13} uzimamo vrednost:

$$x_{13} = \min\{23,15\} = 15.$$

Ovu vrednost za x_{13} upisujemo u donjem desnom uglu polja (1,3) tabele T_13. Na ovaj način, treća prijemna stanica B_3 je zadovoljena, a prva otpremna stanica A_1 ima na raspolaganju još 36 -15 = 21 jedinicu robe. Treću kolonu isključujemo iz daljeg razmatranja, jer su potrebe prijemne stanice B_3 zadovoljene, a postupak nastavljamo sve dok otpremna stanica A_1 ne bude, takođe, zadovoljena.

Tabela II-13. Metod minimalnih cena u redovima – određivanje početnog rešenja

	PS	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
OS	100	13	24	15	21	27
A_1	36	5	12	1 / 15	4	13
A_2	23	7	8	14	6	5
A_3	29	15	4	2	7	9
A_4	12	6	11	5	16	3

Nakon upisivanja vrednosti $x_{13} = 15$, polje sa najmanjim troškovima u prvom redu, koje je preostalo, je polje x_{14}, za koje je:

$$c_{14} = 4 = \min c_{ij},\ \ 1 \le j \le 5;\ \ j \ne 3;\ \ i = 1$$

u njega upisujemo preostalu količina robe otpremne stanice A_1, kao što je prikazano u tabeli II-14:

$$x_{14} = \min\{36\text{-}15{,}21\} = \min\{21{,}21\} = 21.$$

Ovim je zadovoljena prva otpremna stanica A_1 i četvrta prijemna stanica B_4, pa prvi red i drugu kolonu isključujemo iz daljeg postupka.

Tabela II-14. Metod minimalnih cena u redovima – određivanje početnog rešenja

	PS	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
OS	100	13	24	15	21	27
A_1	36	5	12	1 / 15	4 / 21	13
A_2	23	7	8	14	6	5
A_3	29	15	4	2	7	9
A_4	12	6	11	5	16	3

Dalji postupak se nastavlja tako što se najmanja cena transporta po jedinici proizvoda traži u poljima drugog reda. Kako je:

$$c_{25} = 5 = \min c_{ij},\ \ 1 \le j \le 5,\ \ j \ne 3, 4\ \ \ i = 2$$

to u donjem desnom uglu polja (2,5) upisujemo vrednost bazične promenljive $x_{25} = 23$, kao što je prikazano u tabeli II-15.

$$\min\{23,\ 27\} = 23.$$

Ovim je zadovoljena druga otpremna stanica, pa drugi red isključujemo iz daljeg razmatranja. Prijemna stanica B_5 raspolaže još sa kapacitetom od 27 - 23 = 4 jedinica robe.

Tabela II-15. Metod minimalnih cena u redovima – određivanje početnog rešenja

	PS	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
OS	**100**	**13**	**24**	**15**	**21**	**27**
A_1	**36**	**5**	**12**	**1** **15**	**4** **21**	**13**
A_2	**23**	**7**	**8**	**14**	**6**	**5** **23**
A_3	**29**	**15**	**4**	**2**	**7**	**9**
A_4	**12**	**6**	**11**	**5**	**16**	**3**

Među cenama u trećem redu najmanju vrednost ima:

$$c_{32} = 4 = \min c_{ij},\ \ 1 \leq j \leq 5;\ \ j \neq 3, 4;\ \ \ i = 3$$

zato u donjem desnom uglu polja (3,2) upisujemo vrednost bazične promenljive x_{32} = 24, kao što je prikazano u tabeli II-16:

$$x_{32} = \min\{29,24\} = 24.$$

Ovim je zadovoljena druga prijemna stanica, pa drugu kolonu isključujemo iz daljeg razmatranja. Otpremna stanica A_3 raspolaže još sa 29 - 24 = 5 jedinica robe.

Tabela II-16. Metod minimalnih cena u redovima – određivanje početnog rešenja

	PS	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
OS	**100**	**13**	**24**	**15**	**21**	**27**
A_1	**36**	**5**	**12**	**1** **15**	**4** **21**	**13**
A_2	**23**	**7**	**8**	**14**	**6**	**5** **23**
A_3	**29**	**15**	**4** **24**	**2**	**7**	**9**
A_4	**12**	**6**	**11**	**5**	**16**	**3**

Nakon upisivanja vrednosti x_{32} = 24, polje sa najmanjim troškovima u trećem redu, koje je preostalo, je polje x_{35} , za koje je:

$$c_{35} = 9 = \min c_{ij},\ \ 1 \leq j \leq 5;\ \ j \neq 2,3,4;\ \ i = 3$$

U polje x_{35} upisujemo maksimalnu moguću količinu preostale robe otpremne stanice A_3, a to je:

$$x_{35} = \min\{29\text{-}24,27\text{-}23\} = \min\{5,4\} = 4,$$

kao što je prikazano u tabeli II-17.

Tabela II-17. Metod minimalnih cena u redovima – određivanje početnog rešenja

	PS	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
OS	**100**	**13**	**24**	**15**	**21**	**27**
A_1	**36**	**5**	**12**	**1** **15**	**4** **21**	**13**
A_2	**23**	**7**	**8**	**14**	**6**	**5** **23**
A_3	**29**	**15**	**4** **24**	**2**	**7**	**9** **4**
A_4	**12**	**6**	**11**	**5**	**16**	**3**

Na ovaj način su zadovoljene potrebe potrošačkog centra B_5, tako da se peta kolona izostavlja iz daljeg postupka. Međutim, u trećoj otpremnoj stanici A_3 ima na raspolaganju još 29 - 24 - 4 = 1 jedinica robe. Nju možemo da rasporedimo u polje sa najmanjim troškovima koje je preostalo u trećem redu, a to je:

$$c_{31} = 15 = \min c_{ij},\ \ 1 \le j \le 5;\ \ j \ne 2,3,4,5;\ \ i = 3$$

tako u donjem desnom uglu polja (3,1) tabele II-18 upisujemo maksimalnu moguću količinu preostale robe otpremne stanice A_3, a to je:

$$\min\{13, 29\text{-}24\text{-}4\} = \min\{13,1\} = 1.$$

Tabela II-18. Metod minimalnih cena u redovima – određivanje početnog rešenja

	PS	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
OS	**100**	**13**	**24**	**15**	**21**	**27**
A_1	**36**	**5**	**12**	**1** **15**	**4** **21**	**13**
A_2	**23**	**7**	**8**	**14**	**6**	**5** **23**
A_3	**29**	**15** **1**	**4** **24**	**2**	**7**	**9** **4**
A_4	**12**	**6**	**11**	**5**	**16**	**3**

Na ovaj način je ponuda otpremne stanice A_3 zadovoljena, pa iz daljeg postupka proračuna izostavljamo treći red.

Postupak nastavljamo tako što popunjavamo četvri red. Jedino polje u četvrtom redu preko kog možemo da izvršimo transport je:

$$c_{41} = 6 = \min c_{ij},\ \ 1 \le j \le 5;\ \ j \ne 2,3,4,5;\ \ i = 4$$

Otuda sledi da u donjem desnom uglu polja (1,4) upisujemo vrednost bazične promenljive x_{41}=12.

$$x_{41} = \min\{12,13\text{-}1\} = \min\{12,12\} = 12.$$

kao što je prikazano u tabeli II-19:

Tabela II-19. Metod minimalnih cena u redovima – određivanje početnog rešenja

OS \ PS	PS	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
OS	100	13	24	15	21	27
A_1	36	5	12	1 / 15	4 / 21	13
A_2	23	7	8	14	6	5 / 23
A_3	29	15 / 1	4 / 24	2	7	9 / 4
A_4	12	6 / 12	11	5	16	3

Crvenim brojevima je označena količina resursa koja treba da se transportuje iz određenih otpremnih centara do određene prijemne centre. Kao što možemo da uočimo u rešenju se nalaze 7 baznih polja (crveni brojevi), dok su ostale promenljive jednake nuli, i nije ispunjen uslov nedegenerisanosti:

$$r = m + n - 1 = 4 + 5 - 1 = 8.$$

Ovde je reč o *degenerisanom* početnom rešenju transportnog problema. Način na koji se rešavaju degenerisani transportni zadaci prikazaće se u posebnom poglavlju.

Prema tome, ukupni troškovi prevoza, u ovom slučaju, iznose:

$$F\,(x_0)= 1\cdot 15 + 4\cdot 21 + 5\cdot 23 + 15\cdot 1 + 4\cdot 24 + 9\cdot 4 + 6\cdot 12 = 433 \text{ n.j.}$$

Nije teško zapaziti da su ukupni transportni troškovi za ovo početno rešenje znatno manji od troškova za rešenje dobijeno pomoću dijagonalnog metoda.

3.3. Metod minimalnih cena u kolonama

U analiziranoj prvoj koloni se postavlja maksimalni bazni elemenat u polje sa najmanjom jediničnom cenom transporta. Nadalje se postupak nastavlja za preostale kolone. Postupak je ekvivalentan predhodnom metodu minimalnih cena u redovima. Za primer koji je dat u tabeli II-20, uočavamo da je u prvoj koloni cena c_{11} =5 najmanja, pa za promenljivu x_{11} uzimamo vrednost:

$$x_{11} = \min\{36,13\} = 13.$$

Ovu vrednost za x_{11} upisujemo u donjem desnom uglu polja (1,1) tabele II-20. Na ovaj način, prva prijemna stanica B_1 je zadovoljena, a prva otpremna stanica A_1 ima na raspolaganju još 36 -13 = 23 jedinica robe. Zbog toga prvu kolonu isključujemo iz daljeg razmatranja.

Postupak se nastavlja tako što se najmanja cena transporta po jedinici proizvoda traži u poljima druge kolone. Pošto je:

$$c_{32} = 4 = \min c_{ij},\ \ 1 \le i \le 4,\ \ j = 2$$

Tabela II-20. Metod minimalnih cena u kolonama – određivanje početnog rešenja

OS \ PS	PS	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
OS	100	13	24	15	21	27
A_1	36	5 13	12	1	4	13
A_2	23	7	8	14	6	5
A_3	29	15	4	2	7	9
A_4	12	6	11	5	16	3

zato u donjem desnom uglu polja (3,2) upisujemo vrednost bazne promenljive x_{32} = 24, kao što je prikazano u tabeli II-21:

$$\min\{29, 24\} = 24.$$

Na ovaj način je zadovoljena druga prijemna stanica, pa drugu kolonu isključujemo iz daljeg razmatranja. Otpremna stanica A_3 raspolaže još sa 29-24 = 5 jedinica robe.

Među cenama u trećoj koloni najmanju vrednost ima: c_{13} =1= min c_{ij}, $1 \leq i \leq 4$, j=3.

Tabela II-21. Metod minimalnih cena u kolonama – određivanje početnog rešenja

OS \ PS	PS	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
OS	100	13	24	15	21	27
A_1	36	5 13	12	1	4	13
A_2	23	7	8	14	6	5
A_3	29	15	4 24	2	7	9
A_4	12	6	11	5	16	3

zato u donjem desnom uglu polja (1,3) upisujemo vrednost bazične promenljive x_{13} =15, kao što je prikazano u tabeli II-22:

$$x_{13} = \min\{36\text{-}13,15\} = \min\{23,15\} = 15.$$

Ovim je zadovoljena treća prijemna stanica, pa treću kolonu isključujemo iz daljeg razmatranja. Otpremna stanica A_1 raspolaže još sa 36-13-15 = 8 jedinica robe.

Najmanja vrednost cene u četvrtoj koloni je:

$$c_{14} = 4 = \min c_{ij},\ \ 1 \leq i \leq 4,\ \ j = 4$$

Sledi da u donjem desnom uglu polja (1,4) upisujemo vrednost bazične promenljive x_{14} = 8, kao što je prikazano u tabeli II-23:

$$x_{14} = \min\{36\text{-}13\text{-}15,21\} = \min\{8,21\} = 8.$$

Tabela II-22. Metod minimalnih cena u kolonama – određivanje početnog rešenja

	PS	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
OS	**100**	**13**	**24**	**15**	**21**	**27**
A_1	**36**	5 13	12	1 15	4	13
A_2	**23**	7	8	14	6	5
A_3	**29**	15	4 24	2	7	9
A_4	**12**	6	11	5	16	3

Na ovaj način je zadovoljena prva otpremna stanica, pa prvi red isključujemo iz daljeg razmatranja. Prijemna stanica B_4 raspolaže kapacitetom prijema sa još: 21-8 =13 jedinica robe. Dalji postupak se nastavlja tako što se u četvrtoj koloni, u poljima koja su preostala, pronalazi polje sa sledećom najmanjom cenom prevoza:

$$c_{24} = 6 = \min c_{ij},\ \ 1 \le i \le 4;\ \ i \ne 1;\ \ j = 5$$

Tabela II-23. Metod minimalnih cena u kolonama – određivanje početnog rešenja

	PS	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
OS	**100**	**13**	**24**	**15**	**21**	**27**
A_1	**36**	5 13	12	1 15	4 8	13
A_2	**23**	7	8	14	6	5
A_3	**29**	15	4 24	2	7	9
A_4	**12**	6	11	5	16	3

Zato u donjem desnom uglu polja (2,4) upisujemo vrednost bazične promenljive x_{24} =13, kao što je prikazano u tabeli II-24:

$$x_{24} = \min\{23,21\text{-}8\} = \min\{23,13\} = 13.$$

Tabela II-24. Metod minimalnih cena u kolonama – određivanje početnog rešenja

	PS	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
OS	**100**	**13**	**24**	**15**	**21**	**27**
A_1	**36**	5 13	12	1 15	4 8	13
A_2	**23**	7	8	14	6 13	5
A_3	**29**	15	4 24	2	7	9
A_4	**12**	6	11	5	16	3

Tako je zadovoljena četvrta prijemna stanica, pa četrvtu kolonu isključujemo iz daljeg razmatranja. Otpremna stanica A_2 raspolaže kapacitetom još sa: 23 - 13 = 10 jedinica robe. U petoj koloni, najmanja vrednost cene je:

$$c_{45} = 3 = \min c_{ij},\ \ 1 \le i \le 4;\ \ i \neq 1;\ \ j = 5$$

Otuda sledi da u donjem desnom uglu polja (4,5) upisujemo vrednost bazične promenljive $x_{45} = 12$, kao što je prikazano u tabeli II-25:

$$x_{45} = \min\{12,27\} = 12.$$

Na ovakav način je zadovoljena četvrta otpremna stanica A_2, pa četvrti red isključujemo iz daljeg razmatranja. Prijemna stanica B_5 raspolaže još sa kapacitetom prijema od 27 - 12 = 15 jedinica robe.

Nepopunjena polja koja su preostala u petoj koloni x_{25} i x_{35} popunjavamo vrednostima promenljivih na sledeći način:

$$x_{25} = \min\{23\text{-}13,27\text{-}12\} = \min\{10,15\} = 10$$
$$x_{35} = \min\{12,27\text{-}12\text{-}10\} = \min\{12,5\} = 5.$$

Tabela II-25. Metod minimalnih cena u kolonama – određivanje početnog rešenja

OS \ PS	PS 100	B_1 13	B_2 24	B_3 15	B_4 21	B_5 27
A_1	36	5 / 13	12	1 / 15	4 / 8	13
A_2	23	7	8	14	6 / 13	5
A_3	29	15	4 / 24	2	7	9
A_4	12	6	11	5	16	3 / 12

Popunjavanje polja x_{25} i x_{35} prikazano je u tabelama II-26 i II-27.

Tabela II-26. Metod minimalnih cena u kolonama – određivanje početnog rešenja

OS \ PS	PS 100	B_1 13	B_2 24	B_3 15	B_4 21	B_5 27
A_1	36	5 / 13	12	1 / 15	4 / 8	13
A_2	23	7	8	14	6 / 13	5 / 10
A_3	29	15	4 / 24	2	7	9
A_4	12	6	11	5	16	3 / 12

Tabela II-27. Metod minimalnih cena u kolonama – određivanje početnog rešenja

OS \ PS	100	B_1 13	B_2 24	B_3 15	B_4 21	B_5 27
A_1	36	5 / 13	12	1 / 15	4 / 8	13
A_2	23	7	8	14	6 / 13	5 / 10
A_3	29	15	4 / 24	2	7	9 / 5
A_4	12	6	11	5	16	3 / 12

Crvenim brojevima je označena količina resursa koja treba da se transportuje iz određenih otpremnih do određene prijemne centre. Kao što možemo da uočimo u rešenju se nalaze 8 baznih polja (crveni brojevi), dok su ostale promenljive jednake nuli, i ispunjen je uslov nedegenerisanosti:

$$r = m + n - 1 = 4 + 5 - 1 = 8.$$

Ovde je pronađeno *nedegenerisano* početno rešenje transportnog problema, u kome funkcija cilja ima sledeću vrednost:

$$F\,(x_0) = 5\cdot 13 + 1\cdot 15 + 4\cdot 8 + 6\cdot 13 + 5\cdot 10 + 4\cdot 24 + 9\cdot 5 + 3\cdot 12 = 417 \text{ n.j.}$$

Možemo uočiti da su ukupni transportni troškovi, za ovo početno rešenje, znatno manji od troškova koji su dobijeni pomoću dijagonalnog metoda i metodom minimalnih cena u redovima.

3.4. Metod minimalnih cena u matrici – najmanjih cena

Prema metodu minimalnih cena u matrici, ili kako se drugačije zove metod najmanjih jediničnih koeficijenata (cena), za prvu bazičnu promenljivu uzimamo najveće moguće prevoženje u polju tabele, gde je cena prevoza najmanja.

U primeru koji je dat u tabeli II-28, vidimo da je cena c_{22} =1 najmanja, pa za x_{22} uzimamo vrednost:

$$x_{22} = \min\{300,260\} = 260.$$

Ovu vrednost za x_{22} upisujemo u donjem desnom uglu polja (2,2) tabele II-28. Na ovaj način, druga prijemna stanica B_2 je zadovoljena, a druga otpremna stanica A_2 ima na raspolaganju još 300 -260 = 40 jedinica robe. Da ne bismo ispustili iz vida da otpremna stanica A_2 raspolaže sa još 40 jedinica robe, upisaćemo još neraspodeljenu količinu robe na desnoj strani od tabele u visini druge vrste.

Sada se najmanja od preostalih cena traži u poljima preostalih kolona: prve, treće, četvrte i pete. Kako je:

$$c_{31} = 2 = \min c_{ij},\ \ 1 \le i \le 4;\ \ 1 \le j \le 5;\ \ j \ne 2$$

Tabela II-28. Metod minimalnih cena u matrici – određivanje početnog rešenja

	PS	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
OS	**1000**	**140**	**260**	**230**	**140**	**230**	
A_1	**200**	4	4	5	6	7	
A_2	**300**	7	1 260	3	8	11	40
A_3	**350**	2	4	8	5	9	
A_4	**150**	10	7	9	3	10	

to u donjem desnom uglu polja (3,1) upisujemo vrednost bazične promenljive x_{31}:

$$x_{31} = \min\{350, 140\} = 140.$$

Ovim je zadovoljena i prva prijemna stanica, pa prvu kolonu isključujemo iz daljeg razmatranja. Otpremna stanica A_3 raspolaže još sa 350 - 140 = 210 jedinica robe, što zapisujemo desno od tabele u produžetku treće vrste, prikazano u tabeli II-29.

Tabela II-29. Metod minimalnih cena u matrici – određivanje početnog rešenja

	PS	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
OS	**1000**	**140**	**260**	**230**	**140**	**230**	
A_1	**200**	4	4	5	6	7	
A_2	**300**	7	1 260	3	8	11	40
A_3	**350**	2 140	4	8	5	9	210
A_4	**150**	10	7	9	3	10	

Između cena u trećoj, četvrtoj i petoj koloni najmanju vrednost imaju cene c_{23} i c_{44}:

$$c_{23} = c_{44} = 3 = \min c_{ij};\ \ 1 \le i \le 4;\ \ 1 \le j \le 5;\ \ j \neq 1, j \neq 2$$

zato određujemo najpre vrednosti promenljive x_{23} i x_{44} i sasvim je svejedno, u ovoj situaciji, kojim redom to činimo.

$$x_{23} = \min\{300\text{-}260, 230\} = \min\{40, 230\}=40$$

Ovim je iscrpljena druga otpremna stanica, pa naznačenu količinu robe desno od tabele precrtavamo. Ali, trećoj prijemnoj stanici B_3 potrebno je dostaviti još 230 - 40 = 190 jedinica robe, pa to upisujemo na kraju treće kolone ispod tabele, kao što je prikazano u tabeli II-30.

Tabela II-30. Metod minimalnih cena u matrici – određivanje početnog rešenja

OS \ PS	PS	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
OS	1000	140	260	230	140	230	
A_1	200	4	4	5	6	7	
A_2	300	7	1 260	3 40	8	11	~~40~~
A_3	350	2 140	4	8	5	9	210
A_4	150	10	7	9	3	10	
				190			

Kada odredimo za:

$$x_{44} = \min\{150, 140\} = 140,$$

u četvrtoj otpremnoj stanici ostaje još 10 jedinica robe koja može da se otpremi, pa to upisujemo na kraju četvrtog reda pored tabele, a prijemna stanica B_4 je popunjena, što je prikazano u tabeli II-31.

Tabela II-31. Metod minimalnih cena u matrici – određivanje početnog rešenja

OS \ PS	PS	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
OS	1000	140	260	230	140	230	
A_1	200	4	4	5	6	7	
A_2	300	7	1 260	3 40	8	11	~~40~~
A_3	350	2 140	4	8	5	9	210
A_4	150	10	7	9	3 140	10	10
				190			

Među cenama u trećoj i petoj koloni najmanju vrednost ima cena c_{13} =5, pa stavljamo da je

$$x_{13} = \min\{200, 230 - 40\} = 190.$$

Kako je ovim zadovoljena treća prijemna stanica precrtavamo razliku (190), koju smo upisali na dnu ove kolone u prethodnom koraku. Prva otpremna stanica raspolaže sa još 10 (200-190=10) jedinica robe, tako da tu količinu upisujemo na desnoj strani od tabele u visini prve vrste, kao što je prikazano u tabeli II-32.

Preostaju još polja pete kolone i njih popunjavamo vrednostima promenljivih x_{15}, x_{35}, i x_{45}, na sledeći način:

$$x_{15} = 10;$$
$$x_{35} = \min\{350\text{-}140, 230\text{-}10\} = \min\{210, 220\} = 210;$$
$$x_{45} = \min\{150\text{-}140, 230\text{-}10\text{-}210\} = \min\{10,10\} = 10;$$

što se može videti i tabelama od II-33 do II-35.

Tabela II-32. Metod minimalnih cena u matrici – određivanje početnog rešenja

	PS	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
OS	1000	140	260	230	140	230	
A_1	200	4	4	5 190	6	7	10
A_2	300	7	1 260	3 40	8	11	~~40~~
A_3	350	2 140	4	8	5	9	210
A_4	150	10	7	9	3 140	10	10
				~~190~~			

Tabela II-33. Metod minimalnih cena u matrici – određivanje početnog rešenja

	PS	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
OS	1000	140	260	230	140	230	
A_1	200	4	4	5 190	6	7 10	~~10~~
A_2	300	7	1 260	3 40	8	11	~~40~~
A_3	350	2 140	4	8	5	9	210
A_4	150	10	7	9	3 140	10	10
				~~190~~			

Tabela II-34. Metod minimalnih cena u matrici – određivanje početnog rešenja

	PS	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
OS	1000	140	260	230	140	230	
A_1	200	4	4	5 190	6	7 10	~~10~~
A_2	300	7	1 260	3 40	8	11	~~40~~
A_3	350	2 140	4	8	5	9 210	~~210~~
A_4	150	10	7	9	3 140	10	10
				~~190~~			

Tabela II-35. Metod minimalnih cena u matrici – određivanje početnog rešenja

OS	PS	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
	1000	**140**	**260**	**230**	**140**	**230**	
A_1	**200**	4	4	5 **190**	6	7 **10**	~~10~~
A_2	**300**	7	1 **260**	3 **40**	8	11	~~40~~
A_3	**350**	2 **140**	4	8	5	9 **210**	~~210~~
A_4	**150**	10	7	9	3 **140**	10 **10**	~~10~~
				~~190~~			

Ovakvom preraspodelom transpotra zadovoljene su sve otpremne i sve prijemne stanice. Vidimo da je dobijeno rešenje bazično, *nedegenerisano*, jer ima m+n-1 = 4+5-1 = 8 pozitivnih promenljivih. Ukupni troškovi prevoza su:

$F(x_0)$= 5·190 + 7·10 + 1·260 + 3·40 + 2·140 + 9·210 + 3·140 + 10·10 = 3.990 n.j.

3.5. Vogel - ov aproksimativni metod

Vogelov aproksimavni metod je vrlo efikasan metod pronalaženja početnog rešenja transportnog problema. Rešenje dobijeno ovim metodom ne samo da je blizu optimalnom, već će u nekim slučajevima dati odmah optimalno rešenje.

Postupak za rešavanje je sledeći:

a) Za svaki red i svaku kolonu matrice troškova izračunavaju se razlike između dva najmanja koeficijenta c_{ij} (najmanjeg i neposredno većeg troška). Ta razlika se može tretirati kao "kazna" za nekorišćenje najjeftinije transportne relacije. Ako su u nekoj liniji matrice (red, kolona) dva najmanja troška jednaka, onda je razlika za tu liniju jednaka nuli.

b) U narednom koraku izabere se red ili kolona sa najvećom "kaznom" i on će dobiti prednost pri određivanju vrednosti promenljivih. Kada jedan red, odnosno kolona, dobije prednost nad ostalim, u njemu se u polje s najnižim transportnim troškovima određuje promenljiva sa najvećom mogućom vrednošću. Vrednost promenljive x_{ij} jednaka je ili ponudi a_i ili potražnji b_j, već prema manjoj vrednosti. Ukoliko je x_{ij}=a_i onda je ishodiste a_i (kapacitet nekog proizvođača) potpuno iscrpljeno, pa se taj red u narednoj iteraciji izostavlja. U protivnom je zadovoljeno odrediste b_j (potreba nekog potrošača), pa se u narednoj iteraciji izostavlja ta kolona.

c) Ponovo se preračunavaju razlike za preostale redove i kolone. Ako je izostavljen red, nove "kazne" se računaju za kolone jer su po redovima ostale iste i, obratno, ako je izostavljena kolona, računaju se "kazne" za redove.

d) Postupak računanja "kazni", davanje prednosti redu ili koloni, biranje polja sa najmanjim troškom u izabranom redu (koloni) i određivanje vrednosti nove promenljive ponavlja se dok se ne dobije bazično rešenje problema. Drugim rečima, koraci b) i c) se ponavljaju toliko dugo sve dok se ne rasporede količine a_i na odredišta b_j, čime se dobijaju sve komponente početnog baznog rešenja.

Vrednosti aproksimativnog rešenja (početnog rešenja) po Vogelovom metodu dobijaju se množenjem vrednosti dobijenih količina transporta (promenljivih) s odgovarajućim troškovima transporta i njihovim sabiranjem.

Primer 3.5.1. Potrebno je transportovati robu iz četiri ishodišta (otpremnih stanica) u pet odredišta (prijemnih stanica). Količine raspoložive robe u ishodištima i tražene robe u odredištima, kao i transportni troškovi dati su u tabeli II-36. Kriterijum za izvršenje transporta je minimum ukupnih transportnih troškova.

U tabeli II-36. izračunate su razlike između dva najmanja koeficijenta svakog reda i svake kolone i upisane izvan tabele. Posmatrajući razlike, utvrđujemo da su one najveće i jednake za treću i četvrtu kolonu. Zbog toga potrošači B_3 i B_4 imaju prednost u podmirenju svojih potreba. Najmanji trošak u trećoj i četvrtoj koloni je $c_{23} = c_{34} = 3$. pa treba odrediti vrednost ili promenljivoj x_{23} ili x_{34}. Prednost smo dali promenljivoj koja dobija veću vrednost i odredili da je $x_{23} = 30$.

Tabela II-36. Vogel-ov aproksimativni metod – određivanje početnog rešenja

OS \ PS		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
	200	**60**	**50**	**30**	**20**	**40**	
A_1	**65**	8	3	5	5	4	1
A_2	**50**	2	5	3 30	6	8	1
A_3	**40**	4	2	8	3	6	1
A_4	**45**	3	6	9	5	3	0
		1	1	2	2	1	

Pošto je potrošač B_3 podmirio svoje potrebe, treća kolona u tabeli izostavlja se iz daljeg razmatranja. Zbog toga ponovo računamo razlike za redove (po kolonama ostaju iste). Nove razlike su ispisane, takođe, pored tabele, kao što je prikazano u tabeli II-37.

Sada je najveća razlika 3 za drugi red. U drugom redu najmanji. koeficijent je c_{21}=2. Prema tome, u bazično rešenje unosimo x_{21}=20. Ovim je iscrpljena ponuda drugog proizvođača, pa se drugi red izostavlja iz daljeg razmatranja.

Potrebno je izračunati nove razlike po kolonama. Ovoga puta, one su ostale nepromenjene. Zato smo u tabeli II-38, za kolonu B_4 kojoj odgovara najveća razlika (2), izabrali najmanji trošak c_{34} i odredili novu bazičnu promenljivu x_{34}=20. Ovim su podmirene potrebe i potrošača B_4, pa iz daljeg razmatranja izostavljamo i četvrtu kolonu (pored već izostavljenog drugog reda i treće kolone).

Računamo nove razlike za redove i ispisujemo ih pored tabele.

Tabela II-37. Vogel-ov aproksimativni metod – određivanje početnog rešenja

OS \ PS	PS	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
OS	200	60	50	30	20	40	
A_1	65	8	3	5	5	4	1
A_2	50	2 / 20	5	3 / 30	6	8	3
A_3	40	4	2	8	3	6	1
A_4	45	3	6	9	5	3	0
		1	1	-	2	1	

Sada najveća razlika (2) odgovara trećem redu. U trećem redu najmanji koeficijent je c_{32}=2, pa je nova bazična promenljiva x_{32}=20, kao što je prikazano u tabeli II-39. Time je iscrpljena ponuda i trećeg proizvođača, pa se iz daljeg razmatranja izostavlja i treći red tabele.

Tabela II-38. Vogel-ov aproksimativni metod – određivanje početnog rešenja

OS \ PS	PS	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
OS	200	60	50	30	20	40	
A_1	65	8	3	5	5	4	1
A_2	50	2 / 20	5	3 / 30	6	8	-
A_3	40	4	2	8	3 / 20	6	1
A_4	45	3	6	9	5	3	0
		1	1	-	2	1	

Tabela II-39. Vogel-ov aproksimativni metod – određivanje početnog rešenja

OS \ PS	PS	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
OS	200	60	50	30	20	40	
A_1	65	8	3	5	5	4	1
A_2	50	2 / 20	5	3 / 30	6	8	-
A_3	40	4	2 / 20	8	3 / 20	6	2
A_4	45	3	6	9	5	3	0
		1	1	-	-	1	

Za kolone izračunavamo nove razlike i ispisujemo ih pored tabele. Najveća razlika (5) odgovara prvoj koloni. U ovoj koloni, od preostalih koeficijenata, najmanji je c_{41}=3, pa je nova bazična promenljiva x_{41}=40, kao što je prikazano u tabeli II-40. Ovoga puta podmirene su potrebe potrošača B_1, pa iz daljeg razmatranja izostavljamo i prvu kolonu.

Tabela II-40. Vogel-ov aproksimativni metod – određivanje početnog rešenja

OS \ ***PS***		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
	200	**60**	**50**	**30**	**20**	**40**	
A_1	**65**	8	3	5	5	4	1
A_2	**50**	2 20	5	3 30	6	8	-
A_3	**40**	4	2 20	8	3 20	6	-
A_4	**45**	3 40	6	9	5	3	0
		5	1	-	-	1	

Računaju se nove razlike. Najveća razlika (3) odgovara četvrtom redu i drugoj koloni. Najmanji koeficijent u četvrtom redu i drugoj koloni je c_{12}=c_{45}=3, pa treba odrediti vrednost jednoj od promenljivih x_{12} ili x_{45}. Prednost je data promenljivoj x_{12}=30 jer dobija veću vrednost, kao što je prikazano u tabeli II-41. Ovim su podmirene potrebe i potrošača B_2.

Tabela II-41. Vogel-ov aproksimativni metod – određivanje početnog rešenja

OS \ ***PS***		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
	200	**60**	**50**	**30**	**20**	**40**	
A_1	**65**	8	3 30	5	5	4	1
A_2	**50**	2 20	5	3 30	6	8	-
A_3	**40**	4	2 20	8	3 20	6	-
A_4	**45**	3 40	6	9	5	3	3
		-	3	-	-	1	

Posle izostavljanja druge kolone, u tabeli ostaje samo još peta kolona. Zbog toga nije potrebno računati nove razlike, vrednosti preostalih promenljivih za potrošača B_5 lako se određuju. Tabela II-42 sadrži i te promenljive: x_{15} = 35 i x_{45} = 5.

Tabela II-42. Vogel-ov aproksimativni metod – određivanje početnog rešenja

OS \ ***PS***		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
	200	**60**	**50**	**30**	**20**	**40**	
A_1	**65**	8	3 30	5	5	4 35	1
A_2	**50**	2 20	5	3 30	6	8	-
A_3	**40**	4	2 20	8	3 20	6	-
A_4	**45**	3 40	6	9	5	3 5	3
		-	-	-	-	1	

Na ovaj način smo odredili početno bazično rešenje po Vogelovom metodu. Njega sačinjavaju sledeće promenljive: $x_{12} = 30$, $x_{15} = 35$, $x_{21} = 20$, $x_{23} = 20$, $x_{32} = 20$, $x_{34} = 20$, $x_{41} = 40$, $x_{45} = 5$.

Vrednost funkcije cilja iznosi:

$$F(x_0)=3*30+4*35+2*20+3*30+2*20+3*20+3*40+3*5 = 595 \text{ n.j.}$$

U poređenju sa rešenjima dobijenim pomoću prethodnih metoda, rešenja koja se dobijaju ovim metodom imaju najniže ukupne troškove transporta. To znači da se korišćenjem ovog metoda dobijaju rešenja koja su najbliža optimalnom.

U tabeli II-43. prikazano je rešavanje ovog primera, iterativnim postupkom, tako što se ispisivanje "kazni", za nekorišćenje najjeftinije transportne relacije, odvija izvan tabele u posebnom redu i posebnoj koloni.

Tabela II-43. Vogel-ov aproksimativni metod – određivanje početnog rešenja

	PS	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	***Iteracije***						
OS	**200**	**60**	**50**	**30**	**20**	**40**	**I**	**II**	**III**	**IV**	**V**	**VI**	**VII**
A_1	**65**	8	3 **30**	5	5	4 **35**	1	1	1	1	1	1	1
A_2	**50**	2 **20**	5	3 **30**	6	8	1	3	-	-	-	-	-
A_3	**40**	4	2 **20**	8	3 **20**	6	1	1	1	2	-	-	-
A_4	**45**	3 **40**	6	9	5	3 **5**	0	0	0	0	0	3	3
Iteracije	**I**	1	1	2	2	1							
	II	1	1	-	2	1							
	III	1	1	-	2	1							
	IV	1	1	-	-	1							
	V	5	1	-	-	1							
	VI	-	3	-	-	1							
	VII	-	-	-	-	1							

3.6. Vogel – Kordin postupak

Matematičar Korda je modifikovao Vogel-ov metod uvođenjem prethodne redukcije matrice troškova u dva koraka:

a) Od svakog elementa reda prvobitne matrice troškova oduzme se najmanji element tog reda. To se uradi za sve redove matrice, što daje najmanje po jednu nulu u svakom redu.

b) Od svakog elementa kolone prethodno redukovane matrice (prema prvom koraku redukcije) oduzme se najmanji erlement date kolone. To se učini za sve kolone, čime se povećava broj nula u matrici.

Dalji postupak se vrši prema Vogel-ovom metodu, ali na temelju dobijene redukovane matrice troškova.

Primer 3.6.1. Vogel-Kordin postupak biće pokazan na primeru gde je potrebno transportovati robu iz četiri otpremnih u pet prijemnih stanica. Svi potrebni podaci dati su u tabeli II-44. Kriterijum za izvršenje transporta je minimum ukupnih transportnih troškova.

Tabela II-44. Početni podaci za primer urađen Vogel-Kordinim postupkom

OS	PS	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
	117	17	21	41	14	24
A_1	25	10	8	9	6	5
A_2	32	5	6	4	3	8
A_3	40	9	7	5	4	3
A_4	20	14	10	8	8	8

U tabeli II-45. prikazani su transportni troškovi koji su potrebni za izračunavanje početnog rešenje na osnovu Vogel-Kordinog postupka. Redukovana matrica po redovima prikazana je u tabeli II-46, a redukovana matrica po kolonama u tabeli II-47.

abela II-45. Početna tabela za Vogel-Kordin postupak

a_i \ b_j	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	min c_{ij}
a_1	10	8	9	6	5	**5**
a_2	5	6	4	3	8	**3**
a_3	9	7	5	4	3	**3**
a_4	14	10	8	8	8	**8**

Tabela II-46. Redukovana tabela po redovima

a_i \ b_j	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	5	3	4	1	0
a_2	2	3	1	0	5
a_3	6	4	2	1	0
a_4	6	2	0	0	0
min c_{ij}	2	2	0	0	0

Tabela II-47. Redukovana tabela po kolonama

a_i \ b_j	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	3	1	4	1	0
a_2	0	1	1	0	5
a_3	4	2	2	1	0
a_4	4	0	0	0	0

Nakon obavljene dvostruke redukcije na dobijenu matricu se primenjuje poznata Vogelov aproksimativni metod. Početno rešenje po Vogel-Kordinom postupku prikazano je u tabeli II-48.

Tabela II-48. Početno rešenje po Vogel-Kordinom postupku–redukovana tabela

OS \ PS		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Iteracije I II III IV V VI VII
OS	117	17	21	41	14	24	
A_1	25	3	1 (21)	4	1 (4)	0	1 1 0 0 0 0 1
A_2	32	0 (17)	1	1 (15)	0	5	0 1 1 1 - - -
A_3	40	4	2	2 (6)	1 (10)	0 (24)	1 1 1 1 1 1 1
A_4	20	4	0	0 (20)	0	0	0 0 0 - - - -
Iteracije	I	3	1	1	0	0	
	II	-	1	1	0	0	
	III	-	1	1	0	-	
	IV	-	0	1	1	-	
	V	-	1	2	0	-	
	VI	-	1	-	0	-	
	VII	-	-	-	0	-	

Funkcija cilja (kriterijuma) se izračunava tako što se vrednosti za dobijene promenljive unesu u tabelu sa originalnim transportnim troškovima izmnože a nakon toga saberu, kao što je prikazano u tabeli II-49.

Tabela II-49. Početno rešenje po Vogel-Kordinom postupku

OS \ PS		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
OS	117	17	21	41	14	24
A_1	25	10	8 (21)	9	6 (4)	5
A_2	32	5 (17)	6	4 (15)	3	8
A_3	40	9	7	5 (6)	4 (10)	3 (24)
A_4	20	14	10	8 (20)	8	8

Transportni troškovi iznose:

$$F(x_0) = 8{\cdot}21 + 6{\cdot}4 + 5{\cdot}17 + 4{\cdot}15 + 5{\cdot}6 + 4{\cdot}10 + 3{\cdot}24 + 8{\cdot}20 = 639 \text{ n.j.}$$

Po pravilu Vogel-Kordin postupak daje najbolja početna rešenja transportnog zadatka, od svih metoda koje smo do sada napomenuli. U većim, složenijim, primerima ta razlika bi bila još izraženija, u korist ovog postupka.

3.7. Metod dvojnog prvenstva - dvostrukog precrtavanja

U svakoj koloni matrice troškova sa * se označi polje sa minimalnim troškovima. Takođe, u svakom redu sa * se označi polje sa minimalnim troškovima. Nakon završenog označavanja moguće su sledeće situacije: neka polja su označena sa dve, neka sa jednom zvezdicom, a neka su neoznačena. Prvo se popunjavaju polja označena sa dve zvezdice sa maksimalno mogućim količinama robe. Iz daljeg razmatranja se izostavljaju kolone ili redovi ili kolone i redovi, zavisno da li su zadovoljena odredišta ili su prazna ishodišta ili su ispunjena oba uslova. Nakon toga se popunjavaju polja označena sa jednom zvezdicom uz izostavljanje iz daljeg razmatranja kolona ili redova. Neoznačena polja se popunjavaju po redosledu minimalnih troškova. Postupak određivanja početnog rešenja po metodu dvojnog prvenstva (dvostrukog precrtavanja) biće prikazan na primeru.

Primer 3.7.1. Potrebno je transportovati robu iz četiri ishodišta (otpremnih stanica) u četiri odredišta (prijemnih stanica). Količine raspoložive robe u ishodištima i tražene robe u odredištima, kao i transportni troškovi dati su u tabeli II-50. Kriterijum za izvršenje transporta je minimum ukupnih transportnih troškova.

Rešenje. U svakoj vrsti tabele nalazimo polje sa najmanjom cenom i označavamo ga zvezdicom (*). Zatim to isto učinimo i sa kolonama. U nekim poljima naći će se po dve zvezdice, što znači da se u tim poljima nalaze najmanje cene u svojoj vrsti i koloni istovremeno, kao što je prikazano u tabeli II-50.

Tabela II-50. Početni podaci za primer urađen metodom dvojnog prvenstva

	PS	B_1	B_2	B_3	B_4	
OS	**170**	**30**	**35**	**60**	**45**	
A_1	**20**	**8**	**10**	**4** **	**5**	
A_2	**50**	**6**	**4** *	**7**	**3** **	
A_3	**25**	**5** **	**8**	**9**	**6**	
A_4	**75**	**11**	**9**	**10**	**8** *	

U poljima sa dve zvezdice stavljamo najveće moguće dostave. U ovom primeru to su polja (1,3), (2,4) i (3,1), pa veličine dostava u tim poljima biramo na sledeći način:

$$x_{13} = \min\{20, 60\} = 20;$$
$$x_{24} = \min\{50, 45\} = 45;$$
$$x_{31} = \min\{25, 30\} = 25.$$

Preraspodela transporta u ovim poljima prikazana je u tabeli II-51. Posle ovog upisivanja dostave, iz daljeg razmatranja isključujemo prvu i treću vrstu i četvrtu kolonu. Na ovaj način, prva A_1 i teća A_3 otpremna stanica su zadovoljene, tako da su kapaciteti prijemnih stanica B_1 još 30-25=5 i B3 još 60-20=40 jedinica robe. Takođe, četvrta prijemna stanica B_4 je zadovoljena, tako da je ponuda otpremne stanice A_2 još 50-45=5 jedinica robe. Da ne bismo ispustili iz vida ove podatke upisaćemo ih u pomoćnom redu i pomoćnoj koloni pored tabele. Sada se postupak preraspodele transporta (dostava) nastavlja popunjavanjem polja označena sa jednom zvezdicom. Jedino preostalo polje sa jednom zvezdicom, koje se može popunjavati, je polje x_{22}, što je prikazano u tabeli II-52. Kako je:

$$c_{22} = 4 = \min c_{ij}, \quad i \neq 1,\ i \neq 3,\ j \neq 4,$$

upisujemo u polje:

$$x_{22} = \min\{50\text{-}45, 35\} = \min\{5, 35\} = 5$$

Tabela II-51. Metod dvojnog prvenstva – određivanje početnog rešenja

	PS	B_1	B_2	B_3	B_4	
OS	**170**	**30**	**35**	**60**	**45**	
A_1	**20**	**8**	**10**	**4** ** **20**	**5**	
A_2	**50**	**6**	**4** *	**7**	**3** ** **45**	**5**
A_3	**25**	**5** ** **25**	**8**	**9**	**6**	
A_4	**75**	**11**	**9**	**10**	**8** *	
		5		**40**		

Tabela II-52. Metod dvojnog prvenstva – određivanje početnog rešenja

	PS	B_1	B_2	B_3	B_4	
OS	**170**	**30**	**35**	**60**	**45**	
A_1	**20**	**8**	**10**	**4** ** **20**	**5**	
A_2	**50**	**6**	**4** * **5**	**7**	**3** ** **45**	~~**5**~~
A_3	**25**	**5** ** **25**	**8**	**9**	**6**	
A_4	**75**	**11**	**9**	**10**	**8** *	
		5	**30**	**40**		

Ovim je iscrpljena druga otpremna stanica A_2, pa naznačenu količinu robe desno od tabele precrtavamo, a u drugoj koloni upisujemo preostali kapacitet prijemne stanice B_2, koja iznosi još 35-5=30. Preostaje još da se raspodeli roba iz četvrte otpremne stanice. Preraspodela robe četvrte otpremne stanice A_4 obaviće se na sledeći način:

$x_{42} = \min\{75\text{-}5,\ 35\text{-}5\} = 30;$
$x_{43} = \min\{75\text{-}5\text{-}30,\ 60\text{-}20\} = \min\{40,40\} = 40;$
$x_{41} = \min\{75,\ 30\text{-}25\} = 5.$

Kompletno urađeno početno rešenje za transportni zadatak, koristeći metodu dvojnog prvenstva, prikazano je u tabeli II-53:

Tabela II-53. Metod dvojnog prvenstva – konačno početnog rešenja

	PS	B_1	B_2	B_3	B_4	
OS	**170**	**30**	**35**	**60**	**45**	
A_1	**20**	**8**	**10**	**4** ** **20**	**5**	
A_2	**50**	**6**	**4** * **5**	**7**	**3** ** **45**	~~**5**~~
A_3	**25**	**5** ** **25**	**8**	**9**	**6**	
A_4	**75**	**11** **5**	**9** **30**	**10** **40**	**8** *	~~**45**~~, ~~**5**~~
		~~**5**~~	~~**30**~~	~~**40**~~		

Ukupni troškovi prema dobijenom bazičnom planu prevoženja jednaki su:

$F(x_0) = 4{\cdot}20 + 4{\cdot}5 + 3{\cdot}45 + 5{\cdot}25 + 11{\cdot}5 + 9{\cdot}30 + 10{\cdot}40 = 1085$ n.j. (novčanih jedinica).

Primer 3.7.2. Koristeći različite metode, pomenute u predhodnom poglavlju, naći početno, bazično, rešenje transportnog problema. Potrebno je transportovati robu iz četiri ishodišta (otpremnih stanica) u pet odredišta (prijemnih stanica). Količine raspoložive robe u ishodištima i tražene robe u odredištima, kao i transportni troškovi po jedinici proizvoda dati su u tabeli II-54.

Tabela II-54. Transportni problem - početni podaci

OS \ PS		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
	200	60	50	30	20	40
A_1	65	8	3	5	5	4
A_2	50	2	5	3	6	8
A_3	40	4	2	8	3	6
A_4	45	3	6	9	5	3

Rešenje.

1. Metod severo-zapadnog ugla (dijagonalni metod)

OS \ PS		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
	200	60	50	30	20	40
A_1	65	8 / 60	3 / 5	5	5	4
A_2	50	2	5 / 45	3 / 5	6	8
A_3	40	4	2	8 / 25	3 / 15	6
A_4	45	3	6	9	5 / 5	3 / 40

$x_{11} = \min\{a_1, b_1\} = \min\{65{,}60\} = 60$
$x_{12} = \min\{65\text{-}60{,}50\} = 5$
$x_{22} = \min\{50{,}50\text{-}5\} = 45$
$x_{23} = \min\{50\text{-}45{,}30\} = 5$
$x_{33} = \min\{40{,}30\text{-}5\} = 25$
$x_{44} = \min\{45{,}20\text{-}15\} = 5$
$x_{44} = \min\{40\text{-}25{,}20\} = 15$
$x_{45} = \min\{45\text{-}5{,}40\} = 40$

$F(x_0) = 8{*}60 + 3{*}5 + 5{*}45 + 3{*}5 + 8{*}25 + 3{*}15 + 5{*}5 + 3{*}40 = 1.125$ n.j.

2. Metod minimalnih cena u redovima

OS \ PS	200	B_1 60	B_2 50	B_3 30	B_4 20	B_5 40
A_1	65	8	3 / 50	5	5	4 / 15
A_2	50	2 / 50	5	3	6	8
A_3	40	4 / 10	2	8 / 10	3 / 20	6
A_4	45	3	6	9 / 20	5	3 / 25

x_{12} = min {50,60} = 50
x_{15} = min {65-50,40} = 15
x_{21} = min {50,60} = 50
x_{34} = min {40,20} = 20
x_{31} = min {40-20,60-50} = 10
x_{33} = min {40-20-10,30} = 10
x_{45} = min {45,40-15} = 25
x_{43} = min {45-25,30-10} = 20

$F(x_0)$= 3*50 + 4*15 + 2*50 + 4*10 + 8*10 + 3*20 + 9*20 + 3*25 = 745 n.j.

3. Metod minimalnih cena u kolonama

OS \ PS	200	B_1 60	B_2 50	B_3 30	B_4 20	B_5 40
A_1	65	8	3 / 10	5 / 30	5 / 20	4 / 5
A_2	50	2 / 50	5	3	6	8
A_3	40	4	2 / 40	8	3	6
A_4	45	3 / 10	6	9	5	3 / 35

x_{21} = min {50,60} = 50
x_{41} = min {45,60-50} = 10
x_{32} = min {40,50} = 40
x_{12} = min {65,50-40} = 10
x_{13} = min {65-10,30} = 30
x_{14} = min {65-10-30,20} = 20
x_{45} = min {45-10,40} = 35
x_{15} = min {65-10-30-20,40-35} = 5

$F(x_0)$= 3*10 + 5*30 + 5*20 + 4*5 + 2*50 + 2*40 + 3*10 + 3*35 = 615 n.j.

4. Metod minimalnih cena u matrici –jediničnih (najmanjih) koeficijenata (cena)

	PS	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
OS	200	60	50	30	20	40
A_1	65	8	3 10	5 30	5 20	4 5
A_2	50	2 50	5	3	6	8
A_3	40	4	2 40	8	3	6
A_4	45	3 10	6	9	5	3 35

x_{21} = min {50,60} = 50
x_{32} = min {40,50} = 40
x_{12} = min {65,50-40} = 10
x_{41} = min {45,60-50} = 10
x_{45} = min {45-10,40} = 35
x_{15} = min {65-10,40-35} = 5
x_{13} = min {65,10-5,30} = 30
x_{14} = min {65-10-30-5,20} = 20

$F(x_0)$= 3*10 + 5*30 + 5*20 + 4*5 + 2*50 + 2*40 + 3*10 + 3*35 = 615 n.j.

5. Vogel-ov aproksimativni metod

	PS	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	**Iteracije**
OS	200	60	50	30	20	40	**I II III IV V VI VII**
A_1	65	8	3 30	5	5	4 35	1 1 1 1 1 1 1
A_2	50	2 20	5	3 30	6	8	1 3 - - - - -
A_3	40	4	2 20	8	3 20	6	1 1 1 2 - - -
A_4	45	3 40	6	9	5	3 5	0 0 0 0 0 3 3
Iteracije	**I**	1	1	2	2	1	
	II	1	1	-	2	1	
	III	1	1	-	2	1	
	IV	1	1	-	-	1	
	V	5	1	-	-	1	
	VI	-	3	-	-	1	
	VII	-	-	-	-	1	

x_{23} dobija veću vrednost od x_{34}
x_{23} = min {50,30} = 30
x_{21} = min {20,60} = 20
x_{34} = min {40,20} = 20
x_{32} = min {20,50} = 20
x_{41} = min {45,40} = 40
x_{45} = min {5,40} = 5

$$x_{12} = \min\{65{,}30\} = 30$$
$$x_{15} = \min\{35{,}35\} = 35$$

$$F(x_0) = 3*30+4*35+2*20+3*30+2*20+3*20+3*40+3*5 = 595 \text{ n.j.}$$

6. Vogel – Kordin postupak

Početna tabela za Vogel-Kordin postupak

a_i \ b_j	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	$\min c_{ij}$
a_1	8	3	5	5	4	**3**
a_2	2	5	3	6	8	**2**
a_3	4	2	8	3	6	**2**
a_4	3	6	9	5	3	**3**

Redukovana tabela po redovima

a_i \ b_j	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	5	0	2	2	1
a_2	0	3	1	4	6
a_3	2	0	6	1	4
a_4	0	3	6	2	0
$\min c_{ij}$	0	0	1	1	0

Redukovana tabela po kolonama

a_i \ b_j	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	5	0	1	1	1
a_2	0	3	0	3	6
a_3	2	0	5	0	4
a_4	0	3	5	1	0

Početno rešenje po Vogel-Kordinom postupku–redukovana tabela

OS	*PS* 200	B_1 60	B_2 50	B_3 30	B_4 20	B_5 40	**Iteracije** I II III IV V VI VII
A_1	65	5	0 50	1 15	1	1	1 0 0 0 4 4 1
A_2	50	0 35	3	0 15	3	6	0 0 0 0 0 0 0
A_3	40	2 20	0	5	0 20	4	0 2 2 - - - -
A_4	45	0 5	3	5	1	0 40	0 0 0 0 5 - -
Iteracije	I	0	0	1	1	1	
	II	0	-	1	1	1	
	III	0	-	1	-	1	
	IV	0	-	1	-	1	
	V	0	-	1	-	-	
	VI	5	-	1	-	-	
	VII	-	-	1	-		

Početno rešenje po Vogel-Kordinom postupku

	PS	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
OS	**200**	**60**	**50**	**30**	**20**	**40**
A_1	**65**	8	3 (50)	5 (15)	5	4
A_2	**50**	2 (35)	5	3 (15)	6	8
A_3	**40**	4 (20)	2	8	3 (20)	6
A_4	**45**	3 (5)	6	9	5	3 (40)

$F(x_0)$= 3*50+5*15+2*35+3*15+4*20+3*20+3*5+3*40 = 615 n.j.

7. Metod dvostrukog prvenstva (precrtavanja)

Metod dvojnog prvenstva – početna tabela

	PS	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
OS	**200**	**60**	**50**	**30**	**20**	**40**
A_1	**65**	8	3 *	5	5	4
A_2	**50**	2 **	5	3 *	6	8
A_3	**40**	4	2 **	8	3 *	6
A_4	**45**	3 *	6	9	5	3 **

Metod dvojnog prvenstva – određivanje početnog rešenja

	PS	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
OS	**200**	**60**	**50**	**30**	**20**	**40**
A_1	**65**	8 (5)	3 * (10)	5 (30)	5 (20)	4
A_2	**50**	2 ** (50)	5	3 *	6	8
A_3	**40**	4	2 ** (40)	8	3 *	6
A_4	**45**	3 * (5)	6	9	5	3 ** (40)

x_{21} = min {50,60} = 50
x_{32} = min {40,50} = 40
x_{45} = min {45,40} = 40
x_{12} = min {65,50-40} = 10
x_{41} = min {45-40,60-50} = 5
x_{13} = min {65-10,30} = 30
x_{14} = min {65-10-30-5,20} = 20
x_{11} = min {5,5} = 5

$F(x_0)$= 8*5+3*10+5*30+5*20+2*50+2*40+3*5+3*40 = 635 n.j.

4. Nalaženje optimalnog rešenja

Svi metodi rešavanja transportnog zadatka proveravaju najpre da li je početno bazično rešenje optimalno ili nije. Ukoliko početno bazično rešenje nije optimalno, svaki od ovih metoda pokazuje kako se prelazi na bolje bazično rešenje, tj. na bazično rešenje koje obezbeđuje smanjenje troškova prevoza.

4.1. Metod raspodele

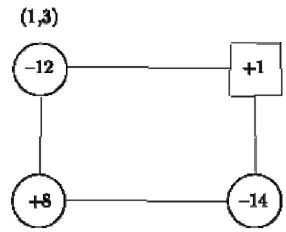
Ovaj metod je nastao u Americi krajem 40-tih godina i sa svojim modifikacijama jedan je od najjednostavnijih metoda za ručno rešavanje transportnog zadatka.

Ovaj metod prikazujemo na primeru u kome je dijagonalnim metodom određeno početno bazično rešenje, tabela II-55. To bazično rešenje je nedegenerisano i ima $m + n - 1 = 4+5-1 = 8$ pozitivnih bazičnih promenljivih. Ukupni troškovi prevoza po ovom prvom bazičnom rešenju jednaki su $F_1 = 870$ novčanih jedinica.

Tabela II-55. Početno rešenje TP određeno dijagonalnim metodom

OS \ PS	PS	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
OS	100	13	24	15	21	27
A_1	36	5 / 13	12 / 23	1	4	13
A_2	23	7	8 / 1	14 / 15	6 / 7	5
A_3	29	15	4	2	7 / 14	9 / 15
A_4	12	6	11	5	16	3 / 12

Provera optimalnosti dobijenog početnog rešenja, tj. da li je dobijeni bazični plan optimalan, radi se na sledeći način. Za svako polje tabele, u kome cena nije opisana kružićem, formiraju se tzv. lanci. Lanac predstavlja zatvoreni poligon u čijem je jednom temenu cena polja, za koje se lanac formira, dok su na ostalim temenima poligona cene sa kružićima. Cena posmatranog polja opisana je kvadratićima u lancu. Svi uglovi lanca su pravi. Broj temena svakog lanca je paran i najmanje jednak 4, a najviše $m+n$. Za svako polje tabele bez kružića (*nebazna polja*) može da se formira jedan i samo jedan lanac. Sa leve gornje strane lanca stavlja se uvek oznaka polja za koje se lanac formira. Konstruišu se lanci za sva nebazna polja tabele (polja gde nema kružića). Za polje (1,3) lanac je oblika kao na slici II-4.



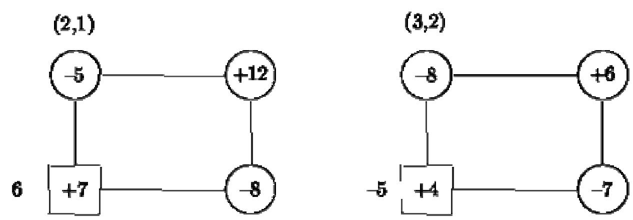
Slika II-4. Lanac za polje 1,3

Ispred cene u kvadratiću stavlja se znak +, a ispred cene u lancu (krećući se u proizvoljnu stranu lanca od kvadratića) znak -, zatim +, itd.

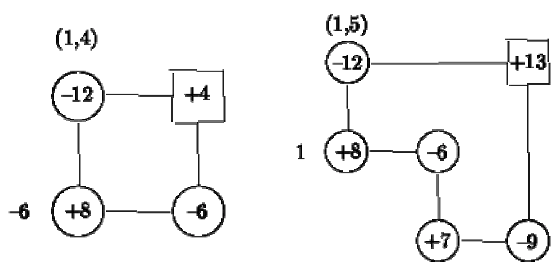
Znaci se menjaju naizmenično ispred cena u temenima lanca. Sve cene u temenima jednog lanca se sabiraju uzimajući u obzir i stavljene znake. Dobijeni zbir se naziva ***karakteristika lanca***. Nju ćemo pisati ispod oznake polja za koje je lanac formiran (dole levo). Karakteristika lanca za polje (1,3) je:

$$k_{13} = 1 - 12 + 8 - 14 = -17$$

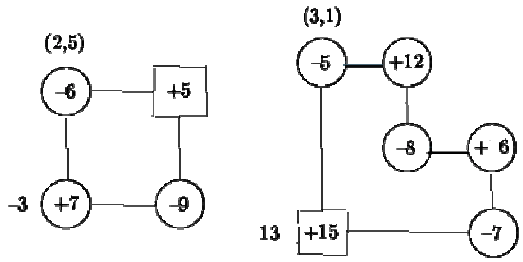
Lanci i njihove karakteristike za ostala polja neoznačena kružićima predstavljeni su slikama od II-5 do II-9.



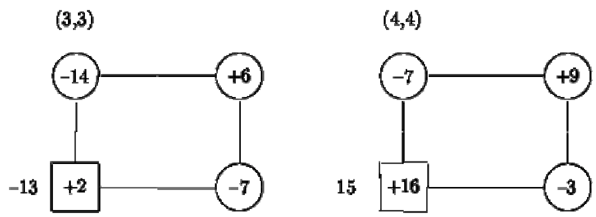
Slika II-5. Lanac za polja 2,1 i 3,2



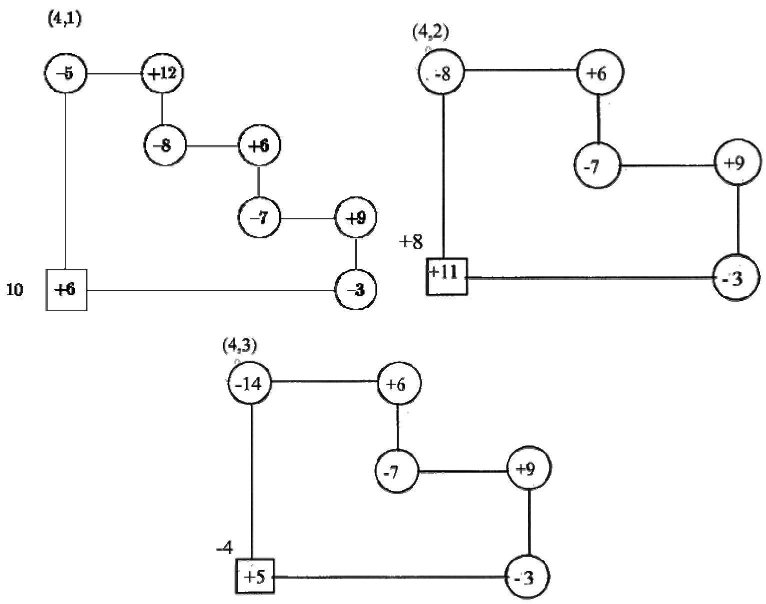
Slika II-6. Lanac za polja 1,4 i 1,5



Slika II-7. Lanac za polja 2,5 i 3,1



Slika II-8. Lanac za polja 3,3 *i* 4,4



Slika II-9. Lanac za polja 4,1*;* 4,2 *i* 4,3

Da bismo ustanovili optimalnost početnog baznog plana, ispitujemo promenu cene prevoza ako u proizvoljno polje, neoznačeno kružićem, unesemo jediničnu dostavu. Pri tome treba voditi računa da jedinice robe za prevoz po vrstama budu jednaki mogućnostima otpremnih stanica, a zbirovi po kolonama jednaki potrebama prijemnih stanica. Tako, na primer, uvodeći jediničnu dostavu u polje (1,3) (x_{13} = 1) obavezni smo da umanjimo za jedinicu neku drugu dostavu koja se otprema iz stanice A_1, a takođe da umanjimo za jedinicu i dostavu trećoj prijemnoj stanici od drugih otpremnih stanica. U konkretnom slučaju umanjuju se dostave u poljima (1,2) i (2,3). Očigledno, smanjenje za jedinicu u polju (2,3) dovodi do uvećanja za jedinicu robe u polju (1,3), ali sada druga stanica B_2 prima jedinicu robe manje. U otpremnoj stanici A_2 našao se višak od jedne jedinice, pa se dostava povećava za jedinicu u polju (2,2). Pri tome, dostava se smanjila za jedinicu u polju čije su cene označene sa –, a povećavala se u poljima čije su cene označene sa +.

Znači, lanac pokazuje polja u kojima mora da se izvrši izmena baz̆ičnih promenljivih, ako se preko polja bez kružića uvede dostava od otpremne do odgovarajuće prijemne stanice. Razmotrimo dalje kakav uticaj na cenu prevoženja imaju ovakve izmene u dostavama. Ukoliko smo, na primer, uveli jedinicu robe za prevoz u polje (1,3). Ukupna cena prevoza se povećava za jednu novčanu jedinicu (jer je c_{13}=1) ona se povećava još za 8, jer se dodaje jedinica robe u polju (2,2), ali se smanjuje za 12 i 14 novčanih jedinica zbog oduzimanja jedne jedinice robe u poljima (1,2) i (2,3). Prema tome, procena iznosi: 1 – 14 + 8 - 12 = -17.

Broj -17 je, dakle, karakteristika lanca za polje (1,3) i pokazuje koliko se novčanih jedinica uštedi ako se uvede jedinična dostava u polje (1,3). Ukupno je 6 negativnih karakteristika lanaca za polja gde nema kružića, kao što je prikazano u tabeli II-56.

Tabela II-56. Određivanje karakteristika lanaca

OS \ PS	PS	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
OS	100	13	24	15	21	27
A_1	36	5 / 13	12 / 23	1 / -17	4 / -6	13 / 1
A_2	23	7 / 6	8 / 1	14 / 15	6 / 7	5 / -3
A_3	29	15 / 13	4 / -5	2 / -13	7 / 14	9 / 15
A_4	12	6 / 10	11 / 8	5 / -4	16 / 15	3 / 12

Zaključujemo: pojava najmanje jedne negativne karakteristike pokazuje da bazični plan nije optimalan. Polje (1,3) ima najmanju od negativnih karakteristika (-17) pa znači da promena po lancu polja (1,3) najviše umanjuje ukupnu cenu prevoza po jedinici robe. Zato ćemo u polje (1,3) da stavimo najveću moguću dostavu; ona je jednaka najmanjoj od dostava u poljima sa negativnim cenama. U našem slučaju 15 jedinica robe oduzimamo od dostava polja (1,2) i (2,3) (15=min{15,23}) i dodajemo dostavama u poljima (1,3) i (2,2). Tako dobijamo novi bazični plan prevoza. On će biti bolji od početnog bazičnog polja, jer će se ukupni troškovi prevoza smanjiti za 15.17 = 255 novčanih jedinica, tj. troškovi prevoza prema drugom bazičnom planu su: F_2 = 870 – 255 = 615 n.j. (novčanih jedinica). Drugi bazični plan (početno rešenje nakon prve iteracije) dat je u tabeli II-57.

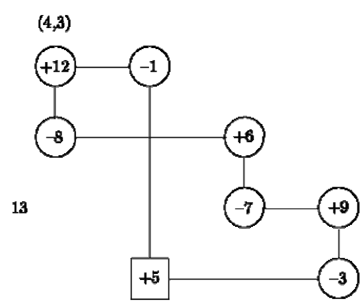
Tabela T_57. Drugo bazično rešenje

	PS	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
OS	100	13	24	15	21	27
A_1	36	5 13	12 8	1 15	4	13
A_2	23	7	8 16	14	6 7	5
A_3	29	15	4	2	7 14	9 15
A_4	12	6	11	5	16	3 12

Isti postupak provere optimalnosti bazičnog plana se primenjuje i u narednom koraku. Lanci polja bez kružića se lako uočavaju. Navodimo vrednosti karakteristika lanaca:

k_{14}= 4-12+8-6 = -6 k_{15}=13-12+8-6+7-9= 1
k_{21}= 7-5+12-8 = 6, k_{23}= 14-8+12-1 = 15, k_{25}= 5-6+7-9 = -3,
k_{31}= 15-7+6-8+12-5 = 13, k_{32} = 4-7+6-8 = -5, k_{33} = 2-1+12-8+6-7=4,
k_{41}= 6-5+12-8+6-7+9-3 = 10, k_{42} = 11-8+6-7+9-3 = 8, k_{44} = 16-7+9-3 = 15

Posebno je zanimljiv lanac polja (4,3), koji je prikazan na slici II-10.



Slika II-10. Lanac za polje 4,4

Tabela II-58 prikazuje karakteristike lanaca za nebazna polja posle prve iteracije.

Tabela T_58. Određivanje karakteristika lanaca drugog bazičnog rešenja

	PS	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
OS	100	13	24	15	21	27
A_1	36	5 13	12 8	1 15	4 -6	13 1
A_2	23	7 6	8 16	14 15	6 7	5 -3
A_3	29	15 13	4 -5	2 4	7 14	9 15
A_4	12	6 10	11 8	5 13	16 15	3 12

Najmanja negativna karakteristika odgovara lancu polja (1,4). Karakteristika lanca ovog polja je k_{14} = 4–6 +8–12 = -6. Kako je x_{14}=7=min{7,8},ovu količinu robe oduzimamo od dostava u poljima sa negativnim cenama i dodajemo dostavama u poljima sa pozitivnim cenama u temenima lanca tog polja. Ukupno smanjenje troškova prevoza za treće bazično rešenje iznosi 7·6 = 42 novčane jedinice, pa su ukupni troškovi prevoza prema trećem bazičnom planu (nakon druge iteracije): F_3 = F_2 – 6·7 = 615 – 42 = 573 novčane jedinice. Treći bazični plan (početno rešenje nakon druge iteracije) dat je u tabeli II-59.

Tabela II-59. Treće bazično rešenje

	PS	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
OS	**100**	**13**	**24**	**15**	**21**	**27**
A_1	**36**	5 **13**	12 **1**	1 **15**	4 **7**	13
A_2	**23**	7	8 **23**	14	6	5
A_3	**29**	15	4	2	7 **14**	9 **15**
A_4	**12**	6	11	5	16	3 **12**

Sada se dobijaju sledeće karakteristike lanaca:

k_{15} = 13-4+7-9 = 7, k_{21}= 7-5+12-8 = 6, k_{23} = 14-1+12-8 = 17,
k_{24} = 6-4+12-8 = 6, k_{25} = 5-8+12-4+7-9 = 3, k_{31}= 15-7+4-5 = 7,
k_{32} = 4-12+4-7 = -11, k_{33} = 2-7+4-1 = 6, k_{41}= 12-3+9-7+4-5 = 4,
k_{42} = 11-3+9-7+4-12 = 2, k_{43} = 5-3+9-7+4-1 = 7, k_{44}= 16-3+9-7 = 15.

Kako je karakteristika lanca za polje (3,2) najmanja negativna karakteristika k_{32} =4–7+4–12 = -11, to je potrebno da se izvrši izmena dostava po ovom lancu. Sada je x_{32}= min{14, 1}=1. Četvrti bazični plan (početno rešenje nakon treće iteracije) dat je u tabeli II-60.

Tabela II-60. Četvrto bazično rešenje

	PS	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
OS	**100**	**13**	**24**	**15**	**21**	**27**
A_1	**36**	5 **13**	12	1 **15**	4 **8**	13
A_2	**23**	7	8 **23**	14	6	5
A_3	**29**	15	4 **1**	2	7 **13**	9 **15**
A_4	**12**	6	11	5	16	3 **12**

Ukupni troškovi prevoza po ovom planu prevoženja su: F_4=F_3-11·1=573-11=562 novčane jedinice. Najmanju negativnu karakteristiku u ovom bazičnom planu ima lanac polja (2,5): k_{25} = 5–8+4–9 = -8. Kako je: x_{25} = 15 = min{x_{35}, x_{22}}, dobijamo da je funkcija cilja: F_5=F_4-15·8=562–120=442 n.j. Peti bazični plan (početno rešenje nakon četvrte iteracije) dat je u tabeli II-61.

Tabela II-61. Peto bazično rešenje

OS	PS 100	B_1 13	B_2 24	B_3 15	B_4 21	B_5 27
A_1	36	5 / 13	12	1 / 15	4 / 8	13
A_2	23	7	8 / 8	14	6	5 / 15
A_3	29	15	4 / 16	2	7 / 13	9
A_4	12	6	11	5	16	3 / 12

Najmanja negativna karakteristika u petom bazičnom planu ima lanac polja (2,4): k_{24}= 6–7+4–8=-5. Kako je x_{24} = min{x_{22}, x_{34}}= 8, to su troškovi prevoza po šestom bazičnom planu (nakon pete iteracije) jednaki: F_6 = F_5 - 5 ·8 = 442 – 40 = 402. Šesti bazični plan (početno rešenje nakon pete iteracije) dat je u tabeli II-62.

Tabela II-_62. Šesto bazično rešenje

OS	PS 100	B_1 13	B_2 24	B_3 15	B_4 21	B_5 27
A_1	36	5 / 13	12	1 / 15	4 / 8	13
A_2	23	7	8	14	6 / 8	5 / 15
A_3	29	15	4 / 24	2	7 / 5	9
A_4	12	6	11	5	16	3 / 12

Najmanju negativnu karakteristiku u šestom bazičnom planu ima lanac polja (3,3): k_{33}=2–7+4–1 = -2, pa kako je x_{33} = min{x_{34}, x_{13}} = 5, to su ukupni troškovi prevoza: F_7= F_6 -2·5= 402–10= 392 n.j. Sedmi bazični plan dat je u tabeli II-63.

Tabela II-63. Sedmo bazično rešenje- prvi optimalni plan

OS	PS 100	B_1 13	B_2 24	B_3 15	B_4 21	B_5 27
A_1	36	5 / 13	12	1 / 10	4 / 13	13
A_2	23	7	8	14	6 / 8	5 / 15
A_3	29	15	4 / 24	2 / 5	7	9
A_4	12	6	11	5	16	3 / 12

Kako su sve karakteristike lanaca polja bez kružića pozitivne, to znači da je plan prevoza optimalan. Na taj način minimalni troškovi prevoza su: $F_{\min} = F_7 = 392$ n.j. Polje (2,1) u poslednjoj tabeli ima karakteristiku koja je 0, pa ako po lancu polja izvršimo maksimalno moguću zamenu dostava, (x_{21} = min{x_{24}, x_{11}} = 8)), to se ukupna cena prevoza ($F_{\min}$ =392) neće promeniti. To znači da naš zadatak ima dva optimalna plana. Drugi optimalni plan je prikazan u tabeli II-64.

Tabela II-64. Drugi optimalni plan

OS \ PS	PS	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
OS	100	13	24	15	21	27
A_1	36	5 / 5	12	1 / 10	4 / 21	13
A_2	23	7 / 8	8	14	6	5 / 15
A_3	29	15	4 / 24	2 / 5	7	9
A_4	12	6	11	5	16	3 / 12

4.2. Metod koeficijenata – potencijala

Metod koeficijenata predstavlja uprošćeni metod raspodele koji je razvio američki matematičar Dantzig. Ovde ne treba konstruisati lance za sva polja neobeležena kružićima, jer se pomoću "koeficijenata" vrsta i kolona neposredno dobijaju lanci sa negativnim karakteristikama. Provera optimalnosti bazičnog plana izvodi se samo pomoću koeficijenata vrsta i kolona. Ti koeficijenti se biraju tako da njihov zbir bude jednak ceni u kružiću polja koje se nalazi u preseku vrste i kolone čiji se koeficijenti sabiraju, tj. ako od cene u kružiću oduzmemo koeficijente posmatrane vrste, dobijamo koeficijente odgovarajuće kolone i obrnuto. Koeficijenti mogu biti pozitivni, negativni ili jednaki nuli.

Postupak za nalaženje optimalnog rešenja pomoću metoda koeficijenata ima sledeći tok:

1) Početni program (rešenje) se odredi po nekom od razrađenih postupaka.
2) Za angažovane rute u početnom baznom rešenju (polja opterećena pozitivnim komponentama početnog rešenja) formira se tabela jediničnih troškova transporta c_{ij}.
3) Svakom redu i svakoj koloni matrice troškova se dodeljuje po jedan pozitivan broj - potencijal ili simpleksni multiplikator. Potencijali redova su u_i (i= l, 2,...,m), a potencijali kolona su v_j (j=1,2,...,n). Potencijali u_j i v_j se biraju tako da je njihova suma jednaka odgovarajućoj vrednosti troška angažovane rute c_{ij}, odnosno:

$$u_i + v_j = c_{ij}, \tag{4.2.1}$$

pri čemu indeksi (i,j) označavaju opterećeno polje u matrici troškova. Obzirom na to da u trenutku određivanja vrednosti potencijala u_j i v_j postoji (n+m) nepoznatih potencijala, a (n+m-1) opterećenih polja, odnosno jednačina, jednoj nepoznatoj se može dati proizvoljna vrednost. Obično se potencijal prvog reda u_1 izjednačava sa nulom, a ostale vrednosti potencijala jednoznačno se izračunavaju iz jednačine $u_i + v_j = c_{ij}$. U praksi se sreće slučaj da se, zbog nedostatka jedne nepoznate, potencijalu koji se najveći broj puta pojavljuje u sistem jednačina dodeljuje vrednost nula.

4) Nakon utvrđivanja vrednosti za potencijale u_j i v_j izračunavaju se vrednosti c'_{ij} za prazna polja u matrici troškova prema obrascu:

$$c'_{ij} = u_i + v_j \tag{4.2.2}$$

5) Vrednosti c'_{ij} se upoređuju s vrednostima odgovarajućih troškova c_{ij} u početnoj tabeli troškova. Ako su za sva polja prvobitni troškovi c_{ij} veći ili jednaki od dobijenih odgovarajućih troskova c'_{ij}, onda je dobijeno rešenje optimalno i ne može se dalje poboljšavati. Polja kod kojih je zadovoljen uslov $c'_{ij} - c_{ij} > 0$ pružaju mogućnost formiranja boljeg rešenja. Kriterijum za izbor polja čija komponenta vektora X ulazi u bazu je:

$$\max [(c'_{ij} - c_{ij}) > 0]. \tag{4.2.3}$$

Da se postojeća ravnoteža početnog rešenja po redovima i kolonama (ravnoteža ponude i potražnje) ne bi poremetila, postupak uvođenja nove komponente x_{rk} na mestu sa najvećom razlikom $c'_{ij} - c_{ij} > 0$ i izlaska iz baze neke od komponenata prvobitnog rešenja mora biti izveden unutar jednog mnogougaonika koji se dobija zamišljenim kretanjem topa u šahu.

Počinje se od polja (r,k), uz moguća skretanja samo na angažovanim (opterećenim poljima). Mnogougaonik se završava u posmatranom polju (r,k), zahvativši manji ili veći broj angazovanih polja, odnosno komponenata x_{ij} početnog rešenja. Temena dobijenog mnogougaonika se označavaju naizmenicno sa (+) i (-), pri čemu je teme *(r,k)* oznaceno sa (+) jer se u to polje dovodi određena (maksimalno moguća) količina tereta. Među količinama sa negativnim temenima izdvaja se najmanja i dodaje količinama čija su temena sa znakom (+), a oduzima od količina čija su temena sa znakom (-).

Rezultat je promena količina na zahvaćenim temenima, ali je pri tome najvažnije da je izabrano polje (r,k) dobilo količinu koja je cirkulisala kroz mnogougaonik, a teme čija je količina cirkulisala ostalo je bez opterećenja, odnosno ispalo je iz programa. Na opisani način se može za svako nepopunjeno polje konstruisati samo jedan jedini mnogougaonik.

6) Sa novodobijenim baznim rešenjem se postupa prema koracima 2), 3), 4) i 5) i postupak se ponavlja sve dok se u nekom ponovljenom koraku 5) ne utvrdi da ne postoji nijedno polje sa $c'_{ij} - c_{ij} > 0$. To je znak da je dobijeno optimalno rešenje.

Primer 4.2.1. Za određivanje optimalnog rešenja metodom potencijala koriste se polazni podaci kao u tabeli II-5. To su podaci iz primera koji su korišćeni za određivanje početnog rešenja kod metoda Vogel-Kordinog postupka.

Tabela II-65. Početni podaci za primer urađen Vogel-Kordinim postupkom

	PS	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
OS	**117**	**17**	**21**	**41**	**14**	**24**
A_1	**25**	10	8	9	6	5
A_2	**32**	5	6	4	3	8
A_3	**40**	9	7	5	4	3
A_4	**20**	14	10	8	8	8

Rešenje.

1) Za početno rešenje izabraćemo rešenje koje je dobijeno metodom severozapadnog ugla, kao što je prikazano u tabeli II-66. Dobijeno je nedegenerisano rešenje X={17,8,13,19,22,14,4, 20} sa tačno $(n+m-1)$ = 8 nenegativnih komponenata vektora X. Troškovi transporta prema dobijenom rešenju iznose: $F(x_0)$=10·17+ 8·8+ 6·13+ 4·19+ 5·22+ 4·14+ 3·4+ 8·20 = 726 n.j.

Tabela II-66. Početno rešenje dobijeno metodom severozapadnog ugla

	PS	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
OS	**117**	**17**	**21**	**41**	**14**	**24**
A_1	**25**	10 17	8 8	9	6	5
A_2	**32**	5	6 13	4 19	3	8
A_3	**40**	9	7	5 22	4 14	3 4
A_4	**20**	14	10	8	8	8 20

2) U tabeli II-67. dati su troškovi za polja koja su angažovana u početnom programu. Ti troškovi c_{ij} su zaokrućeni kako bi se razlikovali od troskova c'_{ij} koji se dobijaju sabiranjem odgovarajućih potencijala u_i i v_j.

Tabela II-67. Troškovi za početno rešenje

	PS	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	u_i
OS	**117**	**17**	**21**	**41**	**14**	**24**	
A_1	**25**	10	8	6	5	4	**0**
A_2	**32**	8 +3	6	4	3	2	**-2**
A_3	**40**	9	7	5	4	3	**-1**
A_4	**20**	14	12 +2	10 +2	9 +1	8	**4**
v_j		**10**	**8**	**6**	**5**	**4**	

3) Potencijali se određuju tako što se stavi da je $u_1=0$, a zatim se računa: $v_1=c_{11}-u_1=10$; $v_2=c_{12}-u_1=8$ i tako redom dok se ne odrede svi potencijali.

4) Vrednosti c'_{ij} za neangažovana polja (nebazna polja) računaju se prema izrazu: $c'_{ij}=u_i+v_j$, npr. $c_{21}=10+2=8$; $c_{31}=10+1=9$.

5) Primenom kriterijuma $max[(c'_{ij} - c_{ij})> \theta]$ bira se polje za ulazak u bazu. Uslov zadovoljava polje (a_2,b_1) sa vrednoscu $c'_{21}=8$ i u to polje treba dovesti količinu $\theta=13$ koja predstavlja minimalnu količinu na negativnim temenima mnogougaonika. U tabeli T_68 izvršeno je poboljšanje početnog programa tako što je polju (a_2,b_1) dodeljena vrednost $\theta=13$ a polje (a_2,b_2) ostaje bez 13 jedinica težine robe i ono napušta bazu. Količina robe u poljima (a_1,b_1) i (a_2,b_2) je $x_{11}=4$ i $x_{12}=21$ jedinica težine, kao što je prikazano u tabeli II-68.

Tabela II-68. Troškovi nakon prvog poboljšanja

OS	PS	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	u_i
	117	17	21	41	14	24	
A_1	25	10 -θ 4	8 +θ 21	6	5	4	0
A_2	32	8 +θ 13	6 -θ 0	4 19	3	2	-2
A_3	40	9	7	5 22	4 14	3 4	-1
A_4	20	14	12	10	9	8 20	4
v_j		10	8	6	5	4	

6) Ponavljanjem koraka 2), 3), 4) i 5) dobija se novo bazno rešenje, kao što je prikazano u tabeli II-69.

Tabela II-69. Troškovi nakon drugog poboljšanja

OS	PS	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	u_i
	117	17	21	41	14	24	
A_1	25	10 -θ 0	8 21	9	8 +θ 4	7	0
A_2	32	5 +θ 17	3	4 -θ 15	3	2	-5
A_3	40	6	4	5 +θ 26	4 -θ 10	3 4	-4
A_4	20	11	9	10	9	8 20	1
v_j		10	8	8	8	7	

Nakon ponovljene celokupne procedure (ponavljanje koraka 2, 3, 4 i 5) dobija se novo bazno rešenje, kao što je prikazano u tabeli II-70.

Tabela II-70. Troškovi nakon trećeg poboljšanja – treće iteracije

OS	PS	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	u_i
	117	17	21	41	14	24	
A_1	25	8	8 21	7	6 4	5	0
A_2	32	5 17	5	4 15	3	2	-3
A_3	40	6	6	5 -θ 6	4 10	3 +θ 24	-2
A_4	20	11	11	10 +θ 20	9	8 -θ 0	3
v_j		8	8	7	6	5	

Vrednosti potencijala i veličina c'_{ij} dobijene u sledećoj iteraciji date su u tabeli II-71.

Tabela II-71. Troškovi u četvrtoj iteraciji

OS	PS	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	u_i
	117	17	21	41	14	24	
A_1	25	8	8 21	7	6 4	5	0
A_2	32	5 17	4	4 15	3	2	-3
A_3	40	6	6	5 6	4 10	3 24	-2
A_4	20	9	9	8 20	7	6	1
v_j		8	8	7	6	5	

Kako nijedno polje ne zadovoljava kriterijum za ulazak u bazu, to znači da je dobijeno rešenje optimalno. Vrednost dobijenog optimalnog rešenja jednaka je:

$$F(x_1) = 17 \cdot 5 + 21 \cdot 8 + 15 \cdot 4 + 6 \cdot 5 + 20 \cdot 8 + 4 \cdot 6 + 10 \cdot 4 + 24 \cdot 3 = 639 \text{ novčanih jedinica}$$

Ušteda koja je postignuta u odnosu na početno rešenje, koje je dobijeno metodom severozapadnog ugla, je:

$$\Delta F = F(x_0) - F(x_1) = 726 - 639 = 87 \text{ novčanih jedinica}$$

Primer 4.2.2. Za transportni zadatak koji je postavljen u tabeli II-72. bazično rešenje je određeno metodom najmanje jedinične cene u matrici.

Tabela II-72 Početno rešenje problema TP

OS	PS	B_1	B_2	B_3	u_i
	400	140	100	160	*kv*
A_1	90	2	5	2 90	0
A_2	200	4 30	1 100	5 70	3
A_3	110	3 110	6	8	2
v_j	*kk*	1	-2	2	

$\min\{c_{ij}\} = c_{22} = 1$
$x_{22} = \min\{200, 100\} = 100$
$\min\{c_{ij}, j \neq 2\} = c_{13} = 2,$
$x_{13} = \min\{90,160\} = 90$
$\min\{c_{ij}, j \neq 2, i \neq 1\} = c_{31} = 3,$
$x_{31} = \min\{110, 140\} = 110$
$x_{21} = \min\{200\text{-}100, 140\text{-}110\} = 30$
$x_{23} = \min\{200\text{-}100\text{-}30, 160\text{-}90\} = 70.$

U tabeli II-72 sa ***kk*** označavaju se koeficijenti kolona, a sa ***kv*** koeficijenti vrste. Najpre ćemo za koeficijenat vrste u_1 odrediti vrednost nula, tj. $u_1=0$. Ostale koeficijente vrsta i kolona određujemo pomoću izraza:

$$c_{ij} = u_i + v_j$$

koji važi za sve cene označene kružićima, tj. za polja sa crvenim brojevima u kojima važi $x_{ij} > 0$. Na taj način se dobija:

$$\begin{aligned}
c_{13} &= u_1 + v_3 &\Rightarrow v_3 &= c_{13} - u_1 = 2-0 = 2\\
c_{23} &= u_2 + v_3 &\Rightarrow u_2 &= c_{23} - v_3 = 5-2 = 3\\
c_{22} &= u_2 + v_2 &\Rightarrow v_2 &= c_{22} - u_2 = 1-3 = -2\\
c_{21} &= u_2 + v_1 &\Rightarrow v_1 &= c_{21} - u_2 = 4-3 = 1\\
c_{31} &= u_3 + v_1 &\Rightarrow u_3 &= c_{31} - v_1 = 3-1 = 2
\end{aligned}$$

Provera optimalnosti plana kod ovog metoda zasniva se na sledećoj teoremi:

Teorema 1. Ako je za sva bazična polja plana ispunjeno:

$$c_{ij} = u_i + v_j \tag{4.2.3}$$

a za slobodna polja

$$c_{ij} \geq u_i + v_j \tag{4.2.4}$$

onda je bazični plan optimalan.

Dokaz: Označimo sa $\{x_{ij}\}$ plan prevoza i sistem koeficijenata vrsta i kolona sa (u_i, v_j). S obzirom da su ispunjeni uslovi (4.2.1) i (4.2.2) , ukupni troškovi prevoza su:

$$F = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\; x_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (u_i + v_j) x_{ij}$$

Za plan $\{x'_{ij}\}$ ovi troškovi glase:

$$F' = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\; x_{ij}'$$

Promenljive x'_{ij} se u nekim poljima poklapaju sa x_{ij} iz plana $\{x_{ij}\}$ ali su zato u nekim poljima gde su $x_{ij} = 0$, one pozitivne.

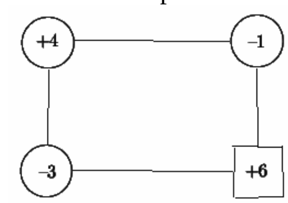
U poljima gde se x_{ij} i x'_{ij} poklapaju ispunjeno je $u_i + v_j = c_{ij}$, a u poljima gde je $x_{ij}= 0$, $x'_{ij} > 0$ ispunjeno je $u_i + v_j < c_{ij}$ pa sledi:

$$F' = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\; x_{ij}' \geq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (u_i + v_j) x_{ij}' \geq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (u_i + v_j) x_{ij} = F$$

što znači da se izmenom plana $\{x_{ij}\}$ troškovi prevoza ne mogu umanjiti tj. plan $\{x_{ij}\}$ sa koeficijentima koji zadovoljavaju uslove (4.2.1) i (4.2.2) daju optimalan plan.

Sada kriterijum optimalnosti glasi: ***Ako su razlike*** $\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$ ***nenegativne za nebazična polja, onda je bazični plan optimalan.***

Može se još pokazati da su ove razlike jednake karakteristikama lanaca polja sa neoznačenim cenama. Konkretno u našem primeru za lanac polja na primer (3,2):



Slika II-11. Lanac za polje 3,2

$$k_{32} = c_{32} - (u_3 + v_2) = 6 - (2-2) = 6.$$

Izračunavaju se sve karakteristike nebazičnih polja:

$$k_{11} = 2 - 1 - 0 = 1$$
$$k_{12} = 5 + 2 - 0 = 7$$
$$k_{32} = 6 + 2 - 2 = 6$$
$$k_{33} = 8 - 2 - 2 = 4$$

U našem primeru ne javlja se nijedna negativna karakteristika, što nam govori da je dobijeni bazični plan, metodom najmanjih jediničnih cena u matrici, optimalan. Bazični plan se može poboljšavati sve dok se pojavljuje makar jedna negativna karakteristika.

Ukupna cena prevoženja u našem primeru je:

$$F_{\min} = 2\cdot 90 + 4\cdot 30 + 1\cdot 100 + 5\cdot 70 + 3\cdot 110 = 1080 \text{ n.j.}$$

Primer 4.2.3. Četiri preduzeća P_i (i=1,4) se snabdevaju proizvodima iz četiri skladišta materijala S_j (j=1,4). Smeštajni kapaciteti preduzeća i skladišta u komadima, kao i jedinični troškovi transportovanja dati su u narednoj tabeli II-73.

Tabela II-73. Početni podaci transportnog zadatka

Preduzeća / ***Skladišta***	P_1 (820)	P_2 (370)	P_3 (180)	P_4 (460)
S_1 (760)	7 $-\theta$ **610**	5	1 $+\theta$	4 **150**
S_2 (210)	3 **210**	14	2	8
S_3 (550)	7 $+\theta$	9 **370**	4 $-\theta$ **180**	11
S_4 (310)	6	10	7	0 **310**

a) Odrediti najbolji transport proizvoda iz skladišta u preduzeća da bi se minimizirali ukupni troškovi transportovanja.

b) Transportni problem rešiti u odnosu na trenutno stanje transporta dato u tabeli. Kvantifikovati efekte predloženih izmena.

Rešenje.

Početni troškovi transporta su: $F(x_0) = 9.550$ n.j.

Kako je početno rešenje degenerisano ($r < m+n-1$), potrebno je uzeti jednačinu sa najnižom cenom transporta, u našem slučaju c_{13} kako bi odredili sve potencijale.

Za bazne elemente računamo: $c_{ij} = u_i + v_j$;

Za nebazne elemente računamo: $\Delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$;

$c_{11} = u_1 + v_1 = 7 =>$	$v_1 = 7$	$\Delta_{12} = c_{12} - u_1 - v_2 = 5 - 0 - 6 = -1$
$c_{14} = u_1 + v_4 = 4 =>$	$v_4 = 4$	$\Delta_{22} = c_{22} - u_2 - v_2 = 14 + 4 - 6 = 3$
$c_{21} = u_2 + v_1 = 3 =>$	$u_2 = -4$	$\Delta_{23} = c_{23} - u_2 - v_3 = 2 + 4 - 1 = 5$
$c_{32} = u_3 + v_2 = 9 =>$	$v_2 = 6$	$\Delta_{24} = c_{24} - u_2 - v_4 = 8 + 4 - 4 = 8$
$c_{33} = u_3 + v_3 = 4 =>$	$u_3 = 3$	$\Delta_{31} = c_{31} - u_3 - v_1 = 7 - 3 - 7 = \mathbf{-3} => \theta = 180$
$c_{44} = u_4 + v_4 = 0 =>$	$u_4 = -4$	$\Delta_{34} = c_{34} - u_3 - v_4 = 11 - 3 - 4 = 4$
$\min c_{ij} = c_{13}$		$\Delta_{41} = c_{41} - u_4 - v_1 = 6 + 4 - 7 = 3$
$c_{13} = u_1 + v_3 = 1 =>$	$v_3 = 1$	$\Delta_{42} = c_{42} - u_4 - v_2 = 10 + 4 - 6 = 8$
$u_1 = 0$		$\Delta_{43} = c_{43} - u_4 - v_3 = 7 + 4 - 1 = 10$

Tabela II-74. Bazno rešenje nakon prve iteracije

Preduzeća / Skladišta	P_1 (820)	P_2 (370)	P_3 (180)	P_4 (460)
S_1 (760)	7 $-\theta$ **430**	5 $+\theta$	1 **180**	4 **150**
S_2 (210)	3 **210**	14	2	8
S_3 (550)	7 $+\theta$ **180**	9 $-\theta$ **370**	4	11
S_4 (310)	6	10	7	0 **310**

Transportni troškovi nakon prve iteracije iznose: $F(x_1) = 9.010$ n.j.

Za bazne elemente računamo: $c_{ij} = u_i + v_j$;

Za nebazne elemente računamo: $\Delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$;

		$\Delta_{12} = c_{12} - u_1 - v_2 = 5 - 0 - 9 = \mathbf{-4} => \theta = 370$
$c_{11} = u_1 + v_1 = 7 =>$	$v_1 = 7$	$\Delta_{22} = c_{22} - u_2 - v_2 = 14 + 4 - 9 = 9$
$c_{13} = u_1 + v_3 = 1 =>$	$v_3 = 1$	$\Delta_{23} = c_{23} - u_2 - v_3 = 2 + 4 - 1 = 5$
$c_{14} = u_1 + v_4 = 4 =>$	$v_4 = 4$	$\Delta_{24} = c_{24} - u_2 - v_4 = 8 + 4 - 4 = 8$
$c_{21} = u_2 + v_1 = 3 =>$	$u_2 = -4$	$\Delta_{33} = c_{33} - u_3 - v_3 = 4 - 0 - 1 = 3$
$c_{31} = u_3 + v_1 = 7 =>$	$u_3 = 0$	$\Delta_{34} = c_{34} - u_3 - v_4 = 11 - 0 - 4 = 7$
$c_{32} = u_3 + v_2 = 9 =>$	$v_2 = 9$	$\Delta_{41} = c_{41} - u_4 - v_1 = 6 + 4 - 7 = 3$
$c_{44} = u_4 + v_4 = 0 =>$	$u_4 = -4$	$\Delta_{42} = c_{42} - u_4 - v_2 = 10 + 4 - 9 = 5$
$u_1 = 0$		$\Delta_{43} = c_{43} - u_4 - v_3 = 7 + 4 - 1 = 10$

Tabela II-75. Bazno rešenje nakon druge iteracije

Preduzeća ***Skladišta***	P_1 **(820)**	P_2 **(370)**	P_3 **(180)**	P_4 **(460)**
S_1 **(760)**	7 **60**	5 **370**	1 **180**	4 **150**
S_2 **(210)**	3 **210**	14	2	8
S_3 **(550)**	7 **550**	9	4	11
S_4 **(310)**	6	10	7	0 **310**

Transportni troškovi nakon druge iteracije iznose: $F(x_0) = 7.530$ n.j.

$c_{11} = u_1 + v_1 = 7 \;\Rightarrow\; v_1 = 7$
$c_{12} = u_1 + v_2 = 5 \;\Rightarrow\; v_2 = 5$
$c_{13} = u_1 + v_3 = 1 \;\Rightarrow\; v_3 = 1$
$c_{14} = u_1 + v_4 = 4 \;\Rightarrow\; v_4 = 4$
$c_{21} = u_2 + v_1 = 3 \;\Rightarrow\; u_2 = -4$
$c_{31} = u_3 + v_1 = 7 \;\Rightarrow\; u_3 = 0$
$c_{44} = u_4 + v_4 = 0 \;\Rightarrow\; u_4 = -4$
$u_1 = 0$

$\Delta_{22} = c_{22} - u_2 - v_2 = 14 + 4 - 5 = 13$
$\Delta_{23} = c_{23} - u_2 - v_3 = 2 + 4 - 1 = 5$
$\Delta_{24} = c_{24} - u_2 - v_4 = 8 + 4 - 4 = 8$
$\Delta_{32} = c_{32} - u_3 - v_2 = 9 + 0 - 5 = 4$
$\Delta_{33} = c_{33} - u_3 - v_3 = 4 - 0 - 1 = 3$
$\Delta_{34} = c_{34} - u_3 - v_4 = 11 - 0 - 4 = 7$
$\Delta_{41} = c_{41} - u_4 - v_1 = 6 + 4 - 7 = 3$
$\Delta_{42} = c_{42} - u_4 - v_2 = 10 + 4 - 9 = 5$
$\Delta_{43} = c_{43} - u_4 - v_3 = 7 + 4 - 1 = 10$

Kako je svako $\Delta_{ij} \geq 0$, dobijeno rešenje je optimalno, i glasi:

$$X^* = \begin{bmatrix} 60 & 370 & 180 & 150 \\ 210 & 0 & 0 & 0 \\ 550 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 310 \end{bmatrix}$$

a, funkcija cilja ima vrednost: $F(X_2) = F(X^*) = 7.530$

Ušteda u odnosu na početno rešenje iznose: $\Delta F(X) = F(X^*) - F(X_0) = 2.020$ n.j.

Primer 4.2.4. Rešititi transportni problem na optimalnom nivou prema šemi transporta datoj u sledećoj tabeli. Pri tome utvrditi minimalne troškove transporta, optimalnu šemu transporta kao i uštede koje se postižu u odnosu na početno rešenje.

Tabela II-76. Početni podaci transportnog zadatka

Odredišta ***Skladišta***	P_1 **(400)**	P_2 **(250)**	P_3 **(400)**	P_4 **(250)**
S_1 **(200)**	4 -θ **200**	3 +θ	5	9
S_2 **(500)**	2 +θ **200**	7	3 -θ **300**	10
S_3 **(350)**	3	4 -θ **250**	8	6 +θ **100**
S_4 **(250)**	6	12	5 +θ **100**	8 -θ **150**

Rešenje.

Početni troškovi transporta su:

$$F(X_0) = 4 \cdot 200 + 2 \cdot 200 + 3 \cdot 300 + 4 \cdot 250 + 6 \cdot 100 + 5 \cdot 100 + 8 \cdot 150 = 5.400 \text{ n.j.}$$

$c_{11} = u_1 + v_1 = 4 \quad =>$	$u_1 = 2$	$\Delta_{12} = c_{12} - u_1 - v_2 = 3–2–4 = -3 => \theta = 150$
$c_{21} = u_2 + v_1 = 2 \quad =>$	$v_1 = 2$	$\Delta_{13} = c_{13} - u_1 - v_3 = 5 - 2 - 3 = 0$
$c_{23} = u_2 + v_3 = 3 \quad =>$	$v_3 = 3$	$\Delta_{14} = c_{14} - u_1 - v_4 = 9 - 2 - 6 = 1$
$c_{32} = u_3 + v_2 = 4 \quad =>$	$v_2 = 4$	$\Delta_{22} = c_{22} - u_2 - v_2 = 7 - 0 - 4 = 3$
$c_{34} = u_3 + v_4 = 6 \quad =>$	$u_3 = 0$	$\Delta_{24} = c_{24} - u_2 - v_4 = 10 - 0 - 6 = 4$
$c_{43} = u_4 + v_3 = 5 \quad =>$	$u_4 = 2$	$\Delta_{31} = c_{31} - u_3 - v_1 = 3 - 0 - 2 = 1$
$c_{44} = u_4 + v_4 = 8 \quad =>$	$v_4 = 6$	$\Delta_{33} = c_{33} - u_3 - v_3 = 8 - 0 - 3 = 5$
$u_2 = 0$		$\Delta_{41} = c_{41} - u_4 - v_1 = 6 - 2 - 2 = 2$
		$\Delta_{42} = c_{42} - u_4 - v_2 = 12 - 2 - 4 = 6$

Tabela II-77. Bazno rešenje nakon prve iteracije

Odredišta ***Skladišta***	***P₁*** **(400)**	***P₂*** **(250)**	***P₃*** **(400)**	***P₄*** **(250)**
S₁ **(200)**	4 -θ **50**	3 +θ **150**	5	9
S₂ **(500)**	2 **350**	7	3 **150**	10
S₃ **(350)**	3 +θ	4 -θ **100**	8	6 **250**
S₄ **(250)**	6	12	5 **250**	8

Troškovi transporta nakon prve iteracije su: $F(x_1) = 4.950$ n.j.

$c_{11} = u_1 + v_1 = 4 \quad =>$	$v_1 = 4$	$\Delta_{13} = c_{13} - u_1 - v_3 = 5 - 0 - 5 = 0$
$c_{12} = u_1 + v_2 = 3 \quad =>$	$v_2 = 3$	$\Delta_{14} = c_{14} - u_1 - v_4 = 9 - 0 - 5 = 4$
$c_{21} = u_2 + v_1 = 2 \quad =>$	$u_2 = -2$	$\Delta_{22} = c_{22} - u_2 - v_2 = 7 + 2 - 3 = 6$
$c_{23} = u_2 + v_3 = 3 \quad =>$	$v_3 = 5$	$\Delta_{24} = c_{24} - u_2 - v_4 = 10 + 2 - 5 = 7$
$c_{32} = u_3 + v_2 = 4 \quad =>$	$u_3 = 1$	$\Delta_{31} = c_{31} - u_3 - v_1 = 3–1–4 = -2 => \theta = 50$
$c_{34} = u_3 + v_4 = 6 \quad =>$	$v_4 = 5$	$\Delta_{33} = c_{33} - u_3 - v_3 = 8 - 1 - 5 = 2$
$c_{43} = u_4 + v_3 = 5 \quad =>$	$u_4 = 0$	$\Delta_{41} = c_{41} - u_4 - v_1 = 6 - 0 - 4 = 2$
$u_1 = 0$		$\Delta_{42} = c_{42} - u_4 - v_2 = 12 - 0 - 3 = 9$
		$\Delta_{44} = c_{44} - u_4 - v_4 = 8 - 0 - 5 = 3$

Tabela II-78. Bazno rešenje nakon druge iteracije

Odredišta ***Skladišta***	***P₁*** **(400)**	***P₂*** **(250)**	***P₃*** **(400)**	***P₄*** **(250)**
S₁ **(200)**	4	3 **200**	5	9
S₂ **(500)**	2 **350**	7	3 **150**	10
S₃ **(350)**	3 **50**	4 **50**	8	6 **250**
S₄ **(250)**	6	12	5 **250**	8

Troškovi transporta nakon prve iteracije su: F(x_2) = 4.750 n.j.

$c_{12} = u_1 + v_2 = 3$ => $u_1 = -1$ $\Delta_{11} = c_{11} - u_1 - v_1 = 4 + 1 - 3 = 2$
$c_{21} = u_2 + v_1 = 2$ => $u_2 = -1$ $\Delta_{13} = c_{13} - u_1 - v_3 = 5 + 1 - 4 = 2$
$c_{23} = u_2 + v_3 = 3$ => $v_3 = 4$ $\Delta_{14} = c_{14} - u_1 - v_4 = 9 + 1 - 6 = 4$
$c_{31} = u_3 + v_1 = 3$ => $v_1 = 3$ $\Delta_{22} = c_{22} - u_2 - v_2 = 7 + 1 - 4 = 4$
$c_{32} = u_3 + v_2 = 4$ => $v_2 = 4$ $\Delta_{24} = c_{24} - u_2 - v_4 = 10+ 1- 6 = 5$
$c_{34} = u_3 + v_4 = 6$ => $v_4 = 6$ $\Delta_{33} = c_{33} - u_3 - v_3 = 8 - 0 - 4 = 4$
$c_{43} = u_4 + v_3 = 5$ => $u_4 = 1$ $\Delta_{41} = c_{41} - u_4 - v_1 = 6 - 1 - 3 = 2$
$u_3 = 0$ $\Delta_{42} = c_{42} - u_4 - v_2 = 12 -1 -4 = 7$
$\Delta_{44} = c_{44} - u_4 - v_4 = 8 - 1 - 6 = 1$

Kako je svako $\Delta_{ij} \geq 0$, dobijeno rešenje je optimalno:

$$F(X_2) = F(X^*) = 4.850 \qquad X^* = \begin{bmatrix} 0 & 200 & 0 & 0 \\ 350 & 0 & 150 & 0 \\ 50 & 50 & 0 & 250 \\ 0 & 0 & 250 & 0 \end{bmatrix}$$

Ušteda u odnosu na početno rešenje je: $\Delta F(X) = F(X^*) - F(X_0) = 550$ n.j.

4.3. Rešavanje TP pomoću softverskih paketa

4.3.1. Rešavanje TP primenom programa LINDO

LINDO – ***L****inear* ***In****teractive and* ***D****iscrete* ***O****ptimizer* – je interaktivni softverski paket koji se može koristiti za rešavanje problema linearnog programiranja, u svim aplikacijama gde je potrebno rešavati problem optimizacije. Razvijen je 1980. godine i od tada je prilagođen Windows okruženju i grafički orijentisanim programima. Softverski paket LINDO koristimo za rešavanje problema zadatih direktno sa tastature.

Elementi LINDO modela su:

1. Cilj – uvek u prvoj liniji LINDO modela, počinje izrazom ***min*** ili ***max***. Označava funkciju cilja, čiji minimum ili maksimum treba odrediti.
2. Jedna ili više varijabli – nepoznate veličine koje treba odrediti da bi se ostvario cilj.
3. Jedno ili više ograničenja – postavljenih na varijablama. U LINDO modelima ograničenjima prethodi jedna od sledećih linija: ***SUBJECT TO; SUCH THAT; S. T.; ST***; Kraj ograničenja se označava sa ***END***, što je obavezno samo u slučaju kada se koriste dodatne komande.

LINDO sintaksa:

- Ime varijable je ograničeno na 8 karaktera.
- LINDO prepoznaje sledeće operatore: + plus, – minus, < manje, > veće, = jednako, <= manje ili jednako i >= veće ili jednako.
- Operacije se izvode s leva na desno.

- Komentari mogu biti bilo gde u modelu, a prethodi im uzvičnik.
- Ograničenja i funkcija cilja mogu biti u više linija.
- LINDO nije osetljiv na veličinu slova.
- Sa desne strane jednačine ograničenja mogu biti samo konstante.
- Sa leve strane ograničenja mogu biti samo promenljive i njihovi koeficijenti.

Komande menija:

File

Save	Snimanje ulaznih podataka (modela), izveštaja ili komandnog prozora. Format u kojem ih snimamo je *.LTX – LINDO tekstualni format.
Log Output	Ako je aktivna ova opcija, sve aktivnosti u aktivnom prozoru se snimaju u tekstualni fajl (dnevnik, log).
Take Commands	Za preuzimanje LINDO komandi iz drugih programa.
Basis Save	Snimanje rešenja aktivnog modela.
Basis Read	Čitanje rešenja modela, koje je bilo sačuvano korišćenjem Basis Save komande.
Title	Prikazuje ime aktivnog modela, ukoliko mu je bilo dodeljeno.
Date	Prikaz tekućeg datuma i vremena.
Elapsed Time	Vreme proteklo u tekućoj LINDO sesiji.

Edit

Options	Uvid i izmene raznih parametara korišćenih u LINDO sesiji.
Paste Symbol	Ispisivanje svih simbola koji se mogu koristiti u LINDO modelu.

Solve

Solve	Rešava aktivni model.
Debug	Omogućava nalaženje greške u modelu.

Reports

Solution	Omogućava određivanje izgleda rešenja.
Range	Daje analizu (intervale, za koje nađeno optimalno rešenje ostaje nepromenjeno) parametara sa desne strane ograničenja i koeficijenata uz promenljive u funkciji cilja.
Parametrics	Daje rezultate promene vrednosti parametara sa desne strane ograničenja.
Statistics	Prikazuje ključnu statstiku za model u aktivnom prozoru.
Peruse	Pregled rešenja u željenom formatu (grafičkom ili tekstualnom, sa odabranim karakteristikama).
Picture	Prikaz aktivnog model u matričnoj formi.
Basis Picture	Prikaz vrsta i kolona poslednje matričnoj transformaciji Solver-a.
Tableau	Prikaz simpleks tabele aktivnog modela.
Formulation	Prikaz svih ili selektovanih delova modela.

Show Column	Prikaz selektovane kolone bez ostatka modela.

Napomen.: da bi opcije menija **Reports** bile aktivne, potrebno je da prozor modela problema bude aktivan.

Window

Open Command Window	Otvara komandni prozor za unos LINDO komandi.
Open Status Window	Otvara prozor sa rešenjem, kao posle opcije Solve.

Help

Za upoznavanje sa karakteristikama programa (kroz primere), preporučuje se korišćenje Help-a, koji ih veoma detaljno i pregledno prikazuje.

Napomena. Neke opcije u navedenim menijima nisu pomenute, jer se poznavanje njihovog značenja pretpostavlja. Odnosno, te opcije su sastavni deo prozora ostalih Windows aplikacija, pa se ne navode posebno.

Dodatne komande LINDO modela:

Pored osnovih elemenata modela, mogu se navesti i sledeće komande (posle END), kojima se proširuju mogućnosti programa:

FREE *ime promenljive*	Omogućava da navedene promenljiva ima realne vrednosti, pozitivne i negativne
GIN *ime promenljive*	Ograničava vrednosti navedene promenljive na pozitivne celobrojne.
INT *ime promenljive*	Ograničava vrednosti navedene promenljive na binarne (0 ili 1).
SLB *ime promenljive*	Postavlja donju granicu promenljive (SLB X 10 – znači da će X biti veće ili jednako od 10)
SUB *ime promenljive*	Postavlja gornju granicu promenljive (SUB X 10 – znači da će X biti manje ili jednako sa 10)
QCP *ime promenljive*	naznačava prvo ograničenje u modelu kvadratnog programiranja
TITLE *naziv*	Omogućava da se modelu dodeli naziv. Naziv će biti prikazan u Reports window, korišćenjem komande Title iz File menija.

Primer 4.3.1.1. Robu iz četiri skladišta S_i (i=1, 2, 3, 4) potrebno je dostaviti u tri preduzeća P_j (j=1, 2, 3). Količina robe u skladištima (izvorima), potrebna količina u preduzećima (ponorima) i cena transporta jedinice robe iz određenog skladišta u određeno preduzeće dati su u tabeli II-79. Potrebno je rešiti zadatak korišćenjem LINDO programskog paketa.

Tabela II-79. Početni podaci transportnog problema

Preduzeća / ***Skladišta***	P_1 **(140)**	P_2 **(35)**	P_3 **(105)**
S_1 **(70)**	50	60	0
S_2 **(105)**	40	20	15
S_3 **(70)**	30	45	20
S_4 **(35)**	35	40	25

Rešenje: Optimalno rešenje transportnog problema korišćenjem LINDO programskog paketa se dobija tako što se najpre, za postavljeni problem, napiše matematički model.

Funkcija cilja je:

min $F(x) = 50x_{11}+60x_{12}+40x_{21}+20x_{22}+15x_{23}+30x_{31}+45x_{32}+20x_{33}+35x_{41}+40x_{42}+25x_{43}$

Ograničenja po redovima su:

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}= 70$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}=105$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}= 70$$
$$x_{41}+x_{42}+x_{43}= 35$$

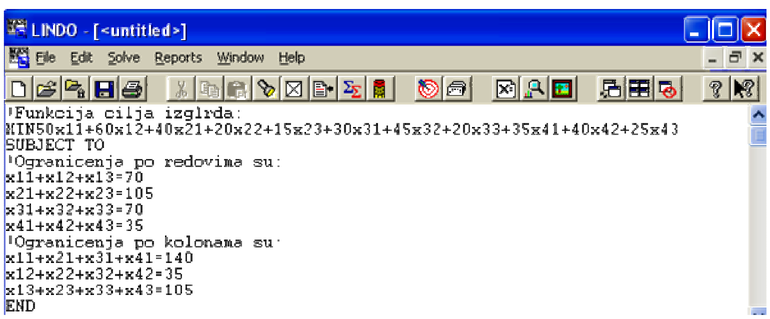
Ograničenja po kolonama su:

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=140$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}= 35$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=105$$

Ovako formulisan matematički model problema potrebno je upisati u radni prostor programskog paketa LINDO, na sledeći način:

```
MIN 50x11+60x12+40x21+20x22+15x23+30x31+45x32+20x33+35x41+40x42+25x43
SUBJECT TO
x11+x12+x13=70
x21+x22+x23=105
x31+x32+x33=70
x41+x42+x43=35
x11+x21+x31+x41=140
x12+x22+x32+x42=35
x13+x23+x33+x43=105
END
```

Izgled ekrana sa postavkom za rešavanje transportnog zadatka, dat je na slici II-12.

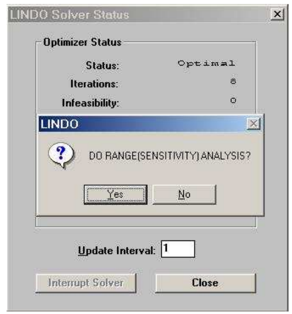


Slika II-12. Izgled postavljenog TP u LINDO programu

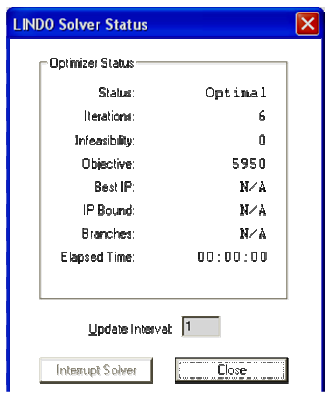
Izborom opcije Solve, ili preko ikone Solve, dobijamo rešenje sledećim redom:

- Prvo se otvara dijalog prozor, slika II-13., gde izborom opcije Yes potvrđujemo da želimo i postoptimalnu analizu rešenja.
- Zatim imamo prikaz stanja LINDO rešavača, slika II-14,u kome vidimo da je rešenje optimalno, dobijeno u 6 iteracija, da je nepodesnost (Infeasibility) modela 0, da je vrednost funkcije cilja (minimum) 5950, dok se ostali parametri odnose na celobrojno programiranje (Integer Programmng), koji imaju oznaku N/A – Not Available, obzirom na to da celobrojno programiranje nije korišćeno.

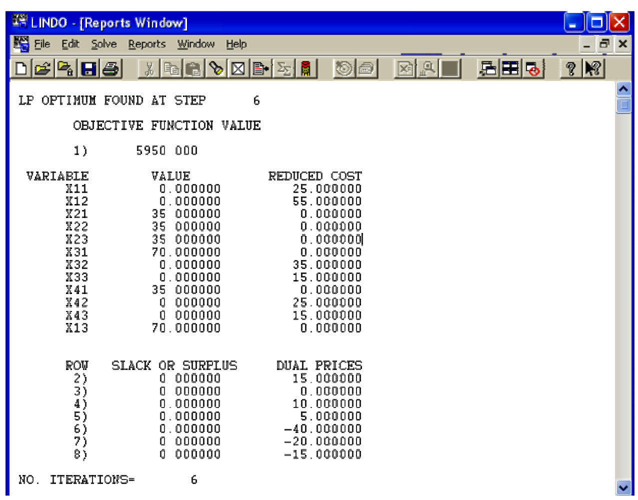
- Zatvaranjem ovog prozora, možemo pogledati rešenje, koje je dato u Reports Window, kao što je prikazano slikom II-15.



Slika II-13. Dijalog prozor sa upitom za postoptimalnu analizu



Slika 14. Status LINDO rešavača



Slika 15. Rešenje TP korišćenjem LINDO programa dato u Reports Window

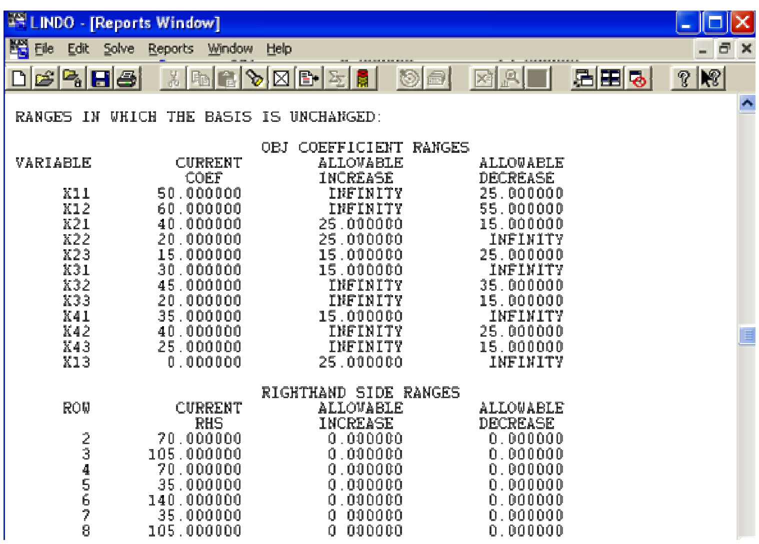
U prvom redu vidimo da je nađeno optimalno rešenje u šest koraku, zatim da je vrednost funkcije cilja 5950, za vrednosti promenljivih (čija su imena navedena u koloni VARIABLE, a vrednosti u koloni VALUE):

X11	**0**.000000
X12	**0**.000000
X13	**70**.000000
X21	**35**.000000
X22	**35**.000000
X23	**35**.000000
X31	**70**.000000
X32	**0**.000000
X33	**0**.000000
X41	**35**.000000
X42	**0**.000000
X43	**0**.000000

U koloni SLACK OR SURPLUS su date vrednosti dopunskih promenljivih (LINDO koristi simplex algoritam rešavanja problema).

Kolona DUAL PRICES (dualne ili cene iz senke) nam govori o tome kako bi se uvođenje resursa koji nisu u rešenju odrazilo na funkciju cilja, odnosno koliko treba da platimo da bi uveli dodatne resurse u rešenje. Ovo su ujedno i vrednosti promenljivih dualnog modela.

Ukoliko smo odabrali i analizu parametara (analizu osetljivosti - senzitivnosti) dobijamo izveštaj o tome, kao što je prikazano na slici II-16.


LINDO - [Reports Window]

File Edit Solve Reports Window Help

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X11	50.000000	INFINITY	25.000000
X12	60.000000	INFINITY	55.000000
X21	40.000000	25.000000	15.000000
X22	20.000000	25.000000	INFINITY
X23	15.000000	15.000000	25.000000
X31	30.000000	15.000000	INFINITY
X32	45.000000	INFINITY	35.000000
X33	20.000000	INFINITY	15.000000
X41	35.000000	15.000000	INFINITY
X42	40.000000	INFINITY	25.000000
X43	25.000000	INFINITY	15.000000
X13	0.000000	25.000000	INFINITY

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	70.000000	0.000000	0.000000
3	105.000000	0.000000	0.000000
4	70.000000	0.000000	0.000000
5	35.000000	0.000000	0.000000
6	140.000000	0.000000	0.000000
7	35.000000	0 000000	0.000000
8	105.000000	0 000000	0.000000

Slika 16. Rezultati analize osetljivosti za transportni zadatak

Ova analiza nam govori o intervalu u kome mogu da se menjaju parametri sa desne strane ograničenja (Righthand Side – RHS) i koeficijenti uz promenljive u funkciji cilja (OBJ Coefficient), a da dobijeno optimalno rešenje ostane nepromenjeno.

4.3.2. Rešavanje TP primenom softverskog paketa LINGO

Ovaj moćni softverski alat je prvenstveno namenjen za rešavanje nelinearnog programiranja. Svaki upravljački zadatak kod koga je funkcija cilja $F(x)$ i/ili skup ogranicenja L definisan nelinearnim zavisnostima (a to se često dešava u praksi), svodi se na zadatak nelinearnog programiranja. Nelinearno programiranje (NP) pokriva znatno šire područje od linearnog programiranja, pa se može reći i da je LP specijalni slučaj NP. Kako je linearno programiranje deo nelinearnog, tj. njegov specijalan oblik, u narednom primeru, prikazano je rešavanje transportnog zadatka pomoću LINGO programskog paketa.

Upotreba elemenata, sintaksi i komandi u LINGO programu se razlikuju u odnosu na primenu LINDO programa, tako da uporedni prikaz rešavanja istog transportnog problema omogućava da ih lakše uočimo.

Primer 4.3.2.1. Potrebno je izvršiti trnsport robe iz dva skladišta (S_1, S_2) do tri prodavnice (P_1, P_2 i P_3). Na skladištima se nalaze 40 i 60, a prodavnicama je potrebno 20, 50 i 30 jedinica robe, respektivno. Troškovi transporta, količina robe u skladištima i prodavnicama dati su u tabeli II-80. Potrebno je problem rešiti korišćenjem LINDO i LINGO programskog paketa.

Tabela II-80. Početni podaci za problem Transportnog zadatka

Prodavnice / ***Skladišta***	P_1	P_2	P_3	***Kapacitet***
S_1	5	8	4	40
S_2	7	3	6	60
Potražnja	20	50	30	

Rešenje: Najpre se za postavljeni problem napiše matematički model.

Funkcija cilja je: $\min F(x) = 5x_{11}+8x_{12}+4x_{13}+7x_{21}+3x_{22}+6x_{23}$

Ograničenja po redovima su:

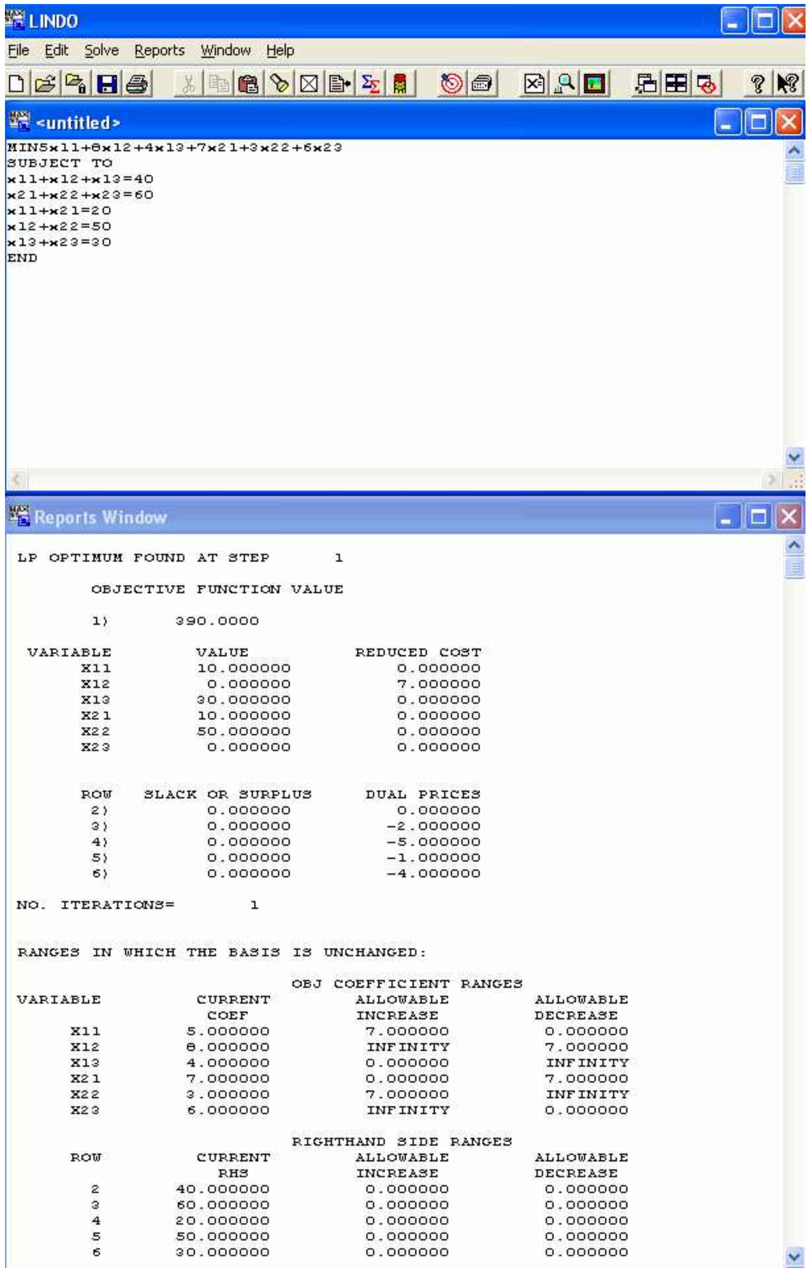
$$x_{11}+x_{12}+x_{13} = 40$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23} = 60$$

Ograničenja po kolonama su:

$$x_{11}+x_{21} = 20$$
$$x_{12}+x_{22} = 50$$
$$x_{13}+x_{23} = 30$$

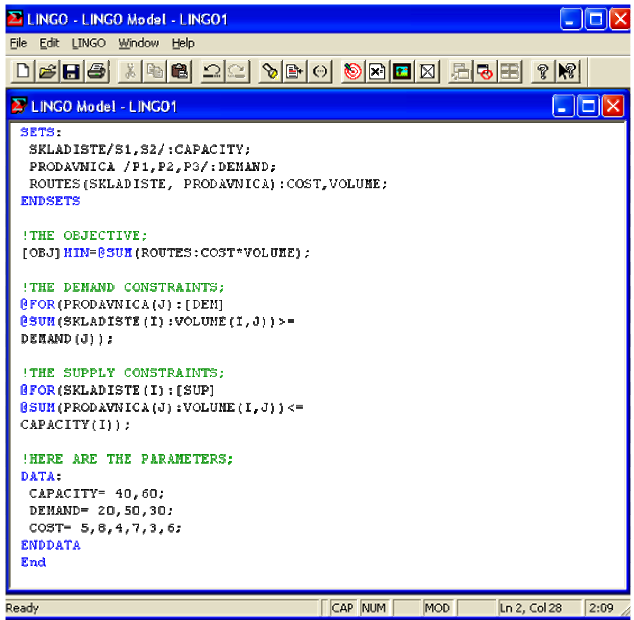
Ovako formulisan matematički model problema potrebno je upisati u radni prostor programskih paketa LINDO i LINGO, kao što je prikazano na slikama od II-17 do II-19.

Postavka zadatka za rešavanje transportnog zadatka pomoću **LINDO** programskog paketa i dobijeno rešenje prikazano je na slici II-17.

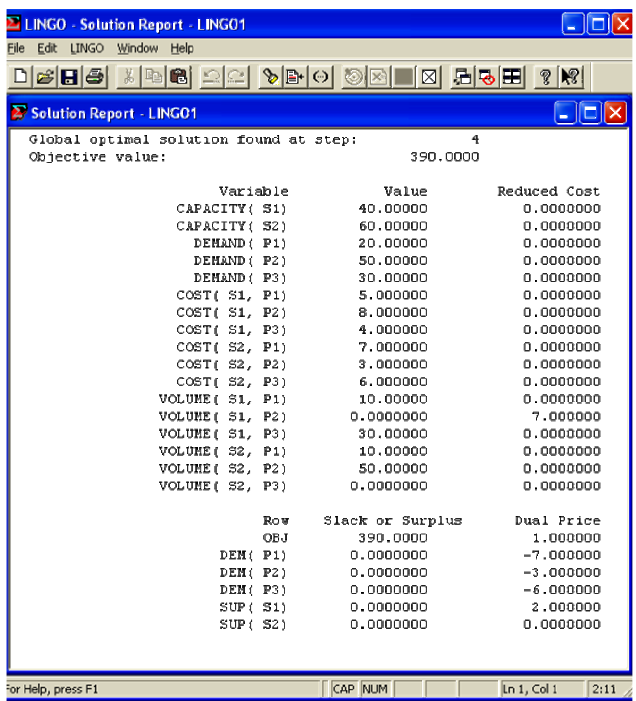


Slika II-17. Postavka zadatka i rešenje dobijeno LINDO programom

Postavka zadatka za rešavanje transportnog zadatka pomoću LINGO programskog paketa prikazano je na slici II-18, a dobijeno rešenje na slici II-19.



Slika II-18. Postavka zadatka u LINGO programom

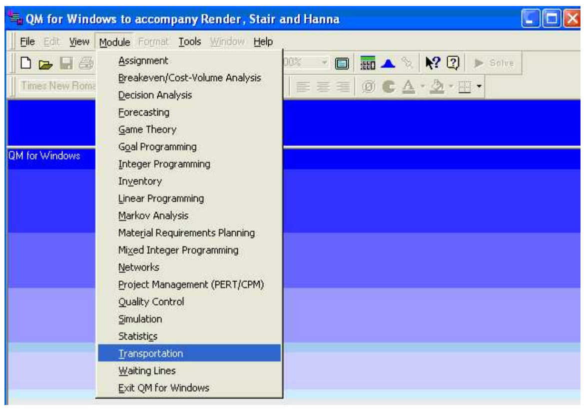


Slika II-19. Rešenje zadatka dobijeno LINGO programom

4.3.3. Rešavanje TP korišćenjem programa "QM for Windows"

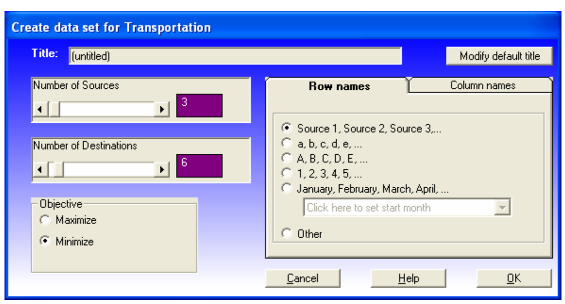
Programski paket "*QM for Windows*" (**Q**uantitative **M**ethod **for Windows**) je razvio profesor Howard Weiss. On spada u omiljene softverske pakete za kvantitativne tehnike, koji koriste studenti. Njegova primena ne zahteva jake računarske konfiguracije i vrlo je lako njime rukovati.

"QM for Windows" program radi pod Windows operativnim sistemom, tako da je korisnički orjentisan (User Frendly) i korišćenje je znatno olakšano sa osnovnim poznavanjem rada sa Windows okruženjem. Konkretnije, nakon instaliranja programa, postavlja se u liniji sa menijima meni "Module", gde je moguće izabrati jednu od ponuđenih opcija za kvantitativno proračunavanje raznih problema. U ponudi je veliki broj metoda, kao što se može uočiti na slici II-20.



Slika II-20. Ponuda menija "Module" u QM for Windows programu

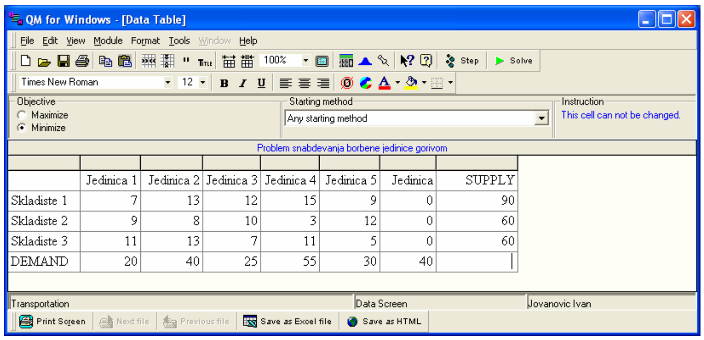
Za rešavanje transportnog problema bira se opcija "Transportation", nakon čega se pokreće program za proračinavanje ovog zadatka. U meniju "File" bira se opcija "New", nakon čega se pokreće prozor za kreiranje podataka za konkretni transportni zadatak "Create date set for Transportation", kao što je prikazano na slici II-21.



Slika II-21. Prozor za kreiranje podataka za TP

U polju "Number of Sourses" se unosi broj izvora, skladiša, centara otpreme. U primeru koji obrađujemo u pitanju su tri skladišta goriva. U polju "Number of

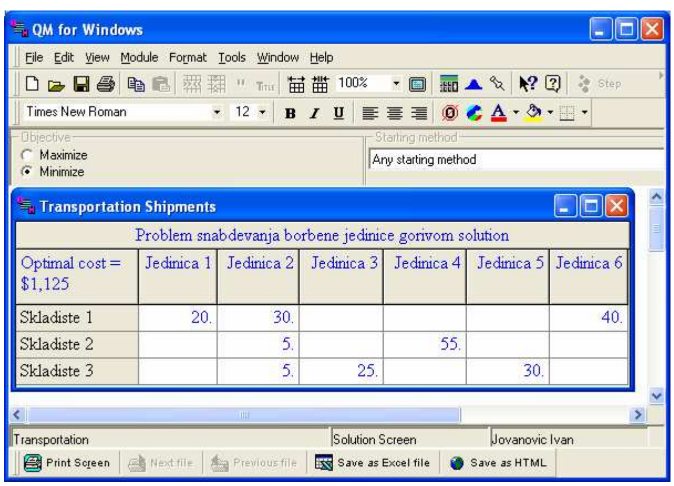
Destinations” se upisuje broj ponora, potrošača, prijemnih centara. Konkretno u primeru egzistiraju šet jedinice koje očekuju transportovano gorivo. Kod opcije “Objective” odabiramo opciju “Minimize” jer je funkcija cilja minimalna vrednost transportnih troškova. Na paletama “Row names” i “Column names” ponuđene su opcije za ispisivanje imena redova i kolona ili data mogućnost da sami kreiramo ime birajući opciju “Other”. Nakon potvrde komandom “OK” pojavljuje se tabela za unos podataka za konkretan transportni problem, slika II- 22.



Slika II-22. Tabela za unošenje podataka transportnog problema

U tabelu se unose podaci za jedinične transportne troškove, kao što je dato u postavci zadatka. U koloni koja je imenovana kao “Jedinica 6” unose se nule, jer je to veštačka kolona koja je posledica transportnog problema otvorenog tipa. U zadatku je dato da su kapaciteti ponude veći od konzumne moći potrošača.

U koloni “Supply” se upisiju količine ponude skladišta, a u redu “Demand” količine potražnje jedinica na terenu. Komandom “Solve” ili tasterom “Enter” daje se nalog za izračunavanje. Rezultat se prikazuje tabelarno, slika II-23.

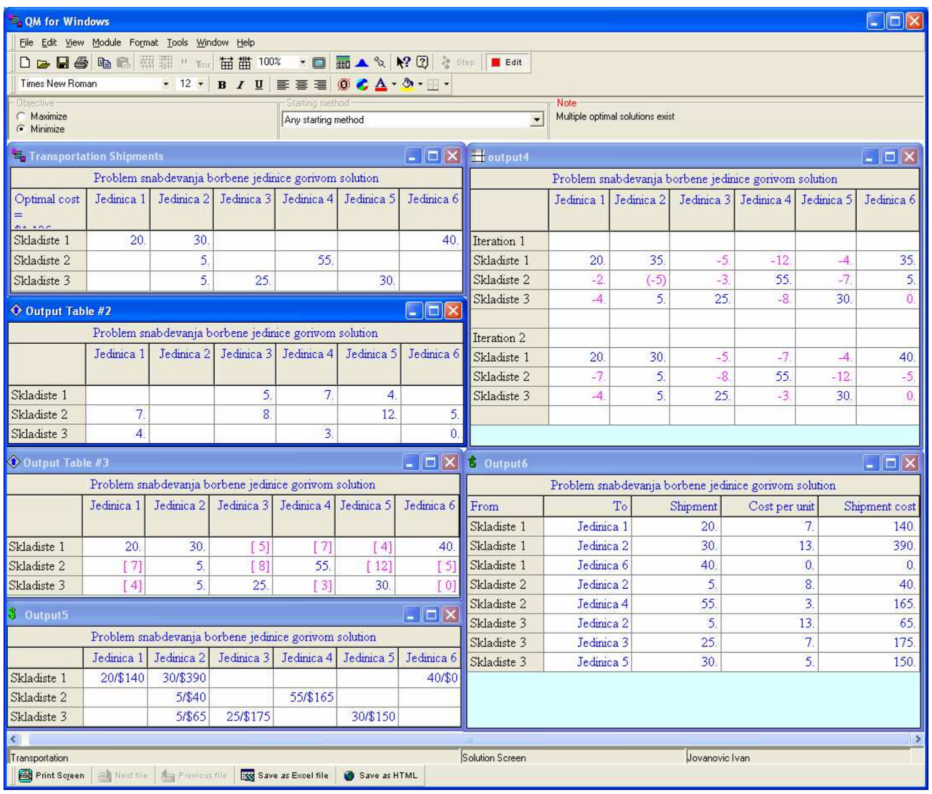


Slika II-23. Rezultat proračuna programa “QM for Windows”

Glavna opcija za prikazivanje rezultata “Transportation Shipment” se automatski prikazuje na ekranu. Može se uočiti da je program izbacio konačno rešenje transportnog problema, gde su prikazane količine transportovane robe od tri skladišta do pet (šest) jedinica koje se nalaze na terenu. Takođe se može uočiti, u gornjem levom polju vrednost funkcije cilja, tj. minimalnu cenu transporta, koja je ovde izražena u dolarima (po “default”-u).

U meniju Window nalazi se ukupno šest vrsta izveštaja za ovaj transportni problem, kao što je prikazano na slici II-24. Pored pomenutog izveštaja za transport robe “Transportation Shipment”, tu se još nalaze:

Output table #2:	Marginal costs (marginalni – kritični troškovi)
Output table #3:	Final solution table (završna tabela)
Output #4:	Iterations (iteracije)
Output #5:	Shipments with costs (troškovi prevoza)
Output #6:	Shipping list (spisak otpremljene robe sa cenom)



Slika II-24. Kompletan izveštaj iz menija Window

4.4. Otvoreni model transportnog problema

Otvoreni problemi transporta nastaju kada nije ispunjen uslov da je:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (4.4.1)$$

U takvim slučajevima neophodno je uvesti fiktivno ishodište, tj. fiktivno odredište.

a) Ukoliko je:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (4.4.2)$$

uvodi se fiktivno orediste B_{n+1} sa zahtevanom količinom:

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (4.4.3)$$

Troškovi transporta iz ishodišta u fiktivno odredište su nula, tj:

$$c_{i\,n+1} = 0;\ 1 \le i \le m \qquad (4.4.4)$$

b) Ukoliko je:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (4.4.5)$$

uvodi se fiktivno ishodiste A_{m+1} sa ponudom od:

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i \qquad (4.4.6)$$

Troskovi transporta od fiktivnog ishodišta do bilo kog odredišta jednaki su nuli, tj:

$$C_{m+1\,j} = 0;\ 1 \le j \le n \qquad (4.4.7)$$

Nakon svođenja početnog problema na odnos $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, za rešavanje se može primeniti neki od objašnjenih postupaka.

Primer 4.4.1. Prilikom izvršenja jednog taktičkog zadatka za snabdevanje gorivom mogu se koristiti tri izvora za snabdevanje sa količinama: 90, 60 i 60 tona. Količine goriva koje jedinice zahtevaju su: 20, 40, 25, 55 i 30 tona, respektivno. Odrediti plan snabdevanja gorivom vodeći računa da troškovi snabdevanja budu minimalni. Jedinični troškovi dati su u tabeli II-81. Odrediti ukupne troškove pri izvršenju dobijenog plana snabdevanja.

Tabela II-81. Početni podaci za transportni problem

OS	PS	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
	$210 \neq 170$	**20**	**40**	**25**	**55**	**30**
A_1	**90**	**7**	**13**	**12**	**15**	**9**
A_2	**60**	**9**	**8**	**10**	**3**	**12**
A_3	**60**	**11**	**13**	**7**	**11**	**5**

Rešenje. Ukupna količina goriva kojom raspolažu izvori snabdevanja iznosi 210 tona, a jedinice potražuju 170 tona. Pošto je količina goriva u izvorima snabdevanja veća od količine koju jedinice traže neophodno je formirati fiktivno odrediste, odnosno u matrici troškova uvesti fiktivnu kolonu sa transportnim troškovima jednakim nuli. Količina goriva koja se dodeljuje fiktivnom odredištu jednaka je:

$$B_6 = \sum_{i=1}^{3} a_i - \sum_{j=1}^{5} b_j = 210 - 170 = 40\ T$$

Početno rešenje biće određeno pomoću Vogelovog aproksimativnog metoda, kao što je prikazano u tabeli II-82.

Tabela II-82. Početno rešenje po Vogel-ovog aproksimativnog metoda

OS \ PS	210=210	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	Iteracije I II III IV V VI
		20	40	25	55	30	40	
A_1	90	7 / 20	13 / 35	12	15	9	0 / 35	7 7 7 2 2 6
A_2	60	9	8	10	3 / 55	12	0 / 5	3 8 - - - -
A_3	60	11	13 / 5	7 / 25	11	5 / 30	0	5 5 5 2 6 2
Iteracije	I	2	5	3	8	4	0	
	II	2	5	3	-	4	0	
	III	4	0	5	-	4	0	
	IV	4	0	5	-	4	-	
	V	4	0	-	-	4	-	
	VI	4	0	-	-	-	-	

Troškovi transporta za početno rešenje iznose 1150 novčanih jedinica. Poboljšanje početnog rešenja biće izvršeno pomoću metoda potencijala.

Vrednosti potencijala u_i i v_j za dato početno rešenje date su u tabeli II-83.

Tabela II-83. Vrednosti potencijala u prvoj iteraciji

OS \ PS	210=210	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	v_j
		20	40	25	55	30	40	
A_1	90	7 / 20	13 / -θ 35	7	3	5	0 / +θ 35	0
A_2	60	7	13 / +θ +5	7	3 / 55	5	0 / -θ 5	0
A_3	60	7	13 / 5	7 / 25	3	5 / 30	0	0
u_i		7	13	7	3	5	0	

Uslov za ulazak u bazu ispunjava polje (a_2,b_2) i u njega se dovodi kolicina θ=5 tona goriva. Rešenje dobijeno nakon izvršene preraspodele goriva po temenima mnogougaonika dato je u tabeli II-84.

Tabela II-84. Vrednosti potencijala u prvoj iteraciji

OS \ PS	210=210	B_1 20	B_2 40	B_3 25	B_4 55	B_5 30	B_6 40	v_j
A_1	90	7 / 20	13 / 30	7	8	5	0 / 40	0
A_2	60	2	8 / 5	2	3 / 55	0	-5	-5
A_3	60	7	13 / 5	7 / 25	8	5 / 30	0	0
u_i		7	13	7	8	5	0	

Kako nijedno polje ne zadovoljava uslov za ulazak u bazu to je dobijeno rešenje optimalno. Ukupni troškovi transporta iznose: $F(x)$= 1.125 novčanih jedinica. Ovaj primer je urađen i korišćenjem programa “QM for Windows” u poglavlju 4.3.3.

4.5. Degeneracija u transportnom problemu

Transportni problem sadrži m+n-1 linearno nezavisnih jednačina koje čine bazu vektorskog prostora, pa na osnovu toga svako nedegenerisano bazično moguće rešenje ima tačno m+n-1 pozitivnih promenljivih x_{ij}. Svako bazično rešenje koje ima manje od m+n-1 pozitivnih promenljivih x_{ij} naziva se ***degenerisano*** rešenje. Do degeneracije dolazi kada istovremeno budu podmireni i ishodište i odredište. Pojava degeneracije onemogućava primenu postupka traženja optimalnog rešenja. Degeneracija je relativno česta pojava u transportnom problemu, ali se rešava na lak način. U slučaju degeneracije, zbog manjeg broja pozitivnih promenljivih x_{ij}, ne može se neposredno koristiti modifikovani metod. Zapravo, na osnovu pozitivnih promenljivih x_{ij} određujemo dualne promenljive u_i i v_j. Ukoliko se ne formira potreban broj jednačina tipa (4.2.1), otkazuje modifikovani metod, i ne mogu se izračunati sve dualne promenljive. Potrebno je da se izvorni podaci o količinama u ishodištu i odredištu modifikuju na sledeći način:

$$\begin{aligned} a_i &= a_i + \varepsilon, && \forall\, i \\ b_j &= b_j && \text{za } j = 1, 2, ..., n\text{-}1 \\ b_j &= b_j + m\,\varepsilon && \text{za } j = n \end{aligned} \tag{4.5.1}$$

Primer 4.5.1. Dat je problem transporta robe iz tri skladišta (A_1, A_2, A_3) na četiri korisničke lokacije (B_1, B_2, B_3, B_4,). Potrebno je odrediti optimalan plan transporta uz minimalne ukupne transportne troškove. Neophodni podaci za izradu plana dati su u tabeli II-85.

Tabela II-85. Početni podaci transportnog problema

OS \ PS	45=45	B_1 5	B_2 15	B_3 15	B_4 10
A_1	15	10	5	20	11
A_2	25	12	7	9	20
A_3	5	5	14	16	18

Rešenje: Početno rešenje dobijeno metodom dvojnog prvenstva, prikazano je u tabeli II-86.

Tabela II-86. Početno rešenje metodom dvojnog prvenstva

	PS	B_1	B_2	B_3	B_4
OS	45=45	**5**	**15**	**15**	**10**
A_1	**15**	**10**	**5** ** **15**	**20**	**11** *
A_2	**25**	**12**	**7** *	**9** * **15**	**20** **10**
A_3	**5**	**5** ** **5**	**14**	**16**	**18**

Početno rešenje je degenerisano jer vektor rešenja ima četiri pozitivne komponente, umesto potrebnih $(n+m-1)=6$. Određivanje početnog rešenja biće ponovljeno sa prethodno modifikovanim količinama a_i i b_j. Ceo postupak sa rešenjem dat je u tabeli II-87.

Tabela II-87. Početno rešenje sa modifikovanim vrednostima a_i i b_j

	PS	B_1	B_2	B_3	B_4
OS	45=45	**5**	**15**	**15**	**10+ 3ε**
A_1	**15** + ε	**10**	**5** ** **15**	**20**	**11** * + ε
A_2	**25** + ε	**12**	**7** *	**9** * **15**	**20** **10**+ ε
A_3	**5** + ε	**5** ** **5**	**14**	**16**	**18** + ε

Rešenje dobijeno na ovaj način nije degenerisano i omogućava primenu postupka optimizacije, što će biti i urađeno. Poboljšanje početnog rešenja biće izvršeno metodom potencijala. Vrednosti potencijala za početno rešenje kao i postupak preraspodele robe po temenima mnogougaonika dati su u tabeli II-88. Poboljšano rešenje je dato u tabeli II-89.

Tabela II-88. Prvo poboljšanje početnog rešenja

	PS	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
OS	45=45	**5**	**15**	**15**	**10+ 3ε**	
A_1	**15** + ε	**-2**	**5** -θ **15**	**0**	**11** +θ + ε	**0**
A_2	**25** + ε	**7**	**14** +θ +7	**9** **15**	**20** -θ **10**+ ε	**9**
A_3	**5** + ε	**5** **5**	**12**	**7**	**18** + ε	**7**
v_j		**-2**	**5**	**0**	**11**	

Tabela II-89. Rešenje nakon prvog poboljšanja

	PS	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
OS	45=45	**5**	**15**	**15**	**10+ 3ε**	
A_1	**15** + ε	**-2**	**5** 5- ε	**7**	**11** **10+ 2ε**	**0**
A_2	**25** + ε	**0**	**7** **10**+ ε	**9** **15**	**13**	**2**
A_3	**5** + ε	**5** **5**	**12**	**14**	**18** + ε	**7**
v_j		**-2**	**5**	**7**	**11**	

Nakon sprovedenog postupka utvrđuje se da je dobijeno rešenje optimalno. Veličine ε ne smetaju, jer se u optimalnom rešenju mogu zanemariti. Ukupni troškovi transporta iznose:

$$F(x)= 5\cdot5 + 5\cdot5 + 10\cdot7 + 15\cdot9 + 10\cdot11 = 365 \text{ novčanih jedinica.}$$

Primer 4.5.2. Iz tri stovarišta (S_1, S_2, S_3) je potrebno snabdeti četiri potrošača (P_1, P_2, P_3, P_4) robom *A*. Raspoložive količine svakog stovarišta, potrebe potrošača, kao i transportni troškovi jedinice robe *A*, dati su u tabeli II-90.

Tabela II-90. Početni podaci transportnog problema

Stovarište	***Potrošači***				***Ponuda***
	P_1	***P_2***	***P_3***	***P_4***	
S_1	7	8	4	8	**20**
S_2	5	3	5	6	**30**
S_3	9	5	7	9	**25**
Potrebe	**20**	**20**	**20**	**20**	

Iz tabele se lako vidi da su potrebe potrošača (20+20+20+20=80) veće od raspoloživih količina koje tri stovarišta mogu isporučiti (20+30+25=75). Prema tome, radi se o otvorenom transportnom problemu. Uvodimo još jedan red u tabelu, novo stovarište sa ponudom od 5 jedinica robe *A* (80-75 =5), čime obezbeđujemo jednakost između ponude stovarišta i potreba potrošača. Troškovi transporta jedinice robe *A* od novog stovarišta do svih potrošača jednaki su nuli.

Posle ovog proširenja problem je lako rešiti. Početno rešenje, pronađeno pomoću Vogel-ove aproksimativnog metoda, prikazano je u tabeli II-91.

Tabela II-91. Početno rešenje dobijeno Vogel-ovim aproksimativnim metodom

OS \ ***PS***		***P_1***	***P_2***	***P_3***	***P_4***	***Iteracije***
		20	**20**	**20**	**20**	**I II III IV V**
S_1	**20**	**7**	**8**	**4** **20**	**8**	**3 3 - - -**
S_2	**30**	**5** **20**	**3** **10**	**5**	**6**	**2 2 2 3 -**
S_3	**25**	**9**	**5** **10**	**7**	**9** **15**	**2 2 2 2 2**
S_4	**5**	**0**	**0**	**0**	**0** **5**	**0 - - - -**
Iteracije	**I**	**5**	**3**	**4**	**6**	
	II	**2**	**2**	**1**	**2**	
	III	**4**	**2**	**-**	**3**	
	IV	**-**	**2**	**-**	**3**	
	V	**-**	**5**	**-**	**9**	

Rešenje je degenerisano. Ima ukupno šest pozitivnih promenljivih x_{ij}, a nedegenerisano rešenje mora imati $m+n$-1= 4+4-1= 7 promenljivih većih od nule. Za primenu modifikovanog metoda, tj. za određivanje dualnih promenljivih u_i i v_j, moramo imati još jednu pozitivnu promenljivu. Koju vrednost može dobiti nova promenljiva i na koje mesto u tabeli je treba upisati?

Novoj promenljivoj određujemo vrednost ε. Ova vrednost promenljive treba da omogući postizanje sledeća dva cilja:

a) vrednost ε je pozitivna i na osnovu toga možemo formirati potrebnu jednačinu za izračunavanje dualnih promenljivih i

b) vrednost ε je vrlo mala, tako da se ona može zanemariti u bazičnom rešenju.

Nešto je teže odabrati koja promenljiva će dobiti vrednost ε. Najbolje je taj izbor izvršiti prilikom određivanja vrednosti dualnih promenljivih u_i i v_j. U tabeli II-92 to je urađeno na sledeći način:

Tabela II-92. Određivanje potencijala u_i i v_j i dodeljivanje vrednosti ε

	PS	P_1	P_2	P_3	P_4	u_i
OS		20	20	20	20	
S_1	20	7	8	4 20	8	0
S_2	30	5 20	3 10	5 -2	6 -1	3
S_3	25	9	5 10	7 +θ -2	9 -θ 15	5
S_4	5	0	0	0 -θ +ε	0 +θ 5	-4
v_j		2	0	4	4	

Odredili smo da je $u_1 = 0$, pa smo, pomoću promenljive $x_{13} > 0$, dobili da je $v_3 = 4$. U prvom redu nema više pozitivnih promenljivih, pa bi postupak trebalo nastaviti preko treće kolone i promenljive v_3. Međutim, i treća kolona nema drugih pozitivnih promenljivih, pa se ovaj postupak ne može nastaviti. To je zbog toga što je rešenje degenerisano. Sada moramo izabrati promenljivu kojoj ćemo dati vrednost ε. Pošto smo odredili samo dualne promenljive u_i i v_j, to mora biti promenljiva iz prvog reda ili treće kolone. Možemo bilo kojoj promenljivoj iz prvog reda i treće kolone dodeliti vrednost ε. Međutim, bolje je sada uzeti u obzir i dodatni kriterijum. Tako smo odredili da to bude promenljiva sa najmanjim koeficijentom c_{ij}. To je $c_{43} = 0$, pa je u tabeli II-92 promenljiva $x_{43} = \varepsilon$. Ona se u daljem postupku rešavanja problema tretira kao i ostale pozitivne promenljive, pa nije teško odrediti i ostale dualne promenljive u_i i v_j, a na osnovu njih i vrednost promenljivih Δ_{ij} ($\Delta_{ij} = c_{ij}-u_i-v_j$). U tabeli II.92 upisane su samo negativne vrednosti promenljivih Δ_{ij}.

Napomena. Zbog promenljive $x_{43} = \varepsilon$, trebalo bi povećati vrednost slobodnih članova S_4 i P_3 za ε. To se ne čini jer je napomenuto da se u proračunima ε zanemaruje.

Rešenje iz tabele II-92 nije optimalno. Pošto je $\Delta_{23} = \Delta_{33} = -2$, jedna od promenljivih x_{23} ili x_{33} u narednoj iteraciji dobija pozitivnu vrednost. Proizvoljno smo uzeli da to bude x_{33}. U tabeli II-92 oznakama (+θ) i (-θ) označene su potrebne promene u postojećem rešenju. Zapazimo da od promenljivih, označenih sa (-θ), najmanju vrednost ima $x_{43} = \varepsilon$. To znači da će promenljiva x_{33} u narednoj iteraciji imati vrednost ε . Ovom promenom neće se menjati vrednost ostalih promenljivih jer, i prilikom oduzimanja ε od neke vrednosti i prilikom dodavanja ε nekoj promenljivoj, mi ε zanemarujemo. Došlo je samo do seljenja vrednosti ε. Zbog toga će se promeniti vrednosti dualnih promenljivih. Sve ove promene date su u tabeli II-93.

Tabela II-93. Rešenje nakon prvog poboljšanja - prve iteracije

OS \ PS		P_1	P_2	P_3	P_4	u_i
		20	20	20	20	
S_1	20	4	2	4 20	6	0
S_2	30	5 20	3 $-\theta$ 10	5	7 $+\theta$ -1	1
S_3	25	7	5 $+\theta$ 10	7 $+\varepsilon$	9 $-\theta$ $15-\varepsilon$	3
S_4	5	-2	-4	-2	0 $5+\varepsilon$	-6
v_j		4	2	4	6	

U tabeli II-93 je promenljiva $\Delta_{24} = -1$, što znači da nije pronađeno optimalno rešenje. Promenljiva x_{24} u narednoj iteraciji dobija pozitivnu vrednost. Novo bazično rešenje nalazi se u tabeli II-94.

Tabela II-94. Konačno rešenje nakon druge iteracije

OS \ PS		P_1	P_2	P_3	P_4	u_i
		20	20	20	20	
S_1	20	5	2	4 20	6	0
S_2	30	5 20	3	4	6 10	0
S_3	25	7	5 20	7 $+\varepsilon$	9 $5-\varepsilon$	3
S_4	5	-1	-4	-2	0 $5+\varepsilon$	-6
v_j		5	2	4	6	

U tabeli II-94. nema negativnih promenljivih Δ_{ij}, pa je pronađeno optimalno rešenje. Ono je degenerisano i čine ga sledeće promenljive: x_{13}=20, x_{21}=20, x_{24}=10, x_{32}=20, x_{34}=5, x_{45}= 5, a minimalna vrednost funkcije kriterijuma iznosi 345 n.j.

Pošto se radi o otvorenom transportnom problemu, potrebno je objasniti ulogu promenljive x_{44}. Četvrto stovarište je nepostojeće, pa potrošač koji deo svojih potreba podmiruje odatle, u stvari, neće podmiriti svoje potrebe u potpunosti. Kako je x_{44} = 5, pa četvrti potrošač neće dobiti ovih 5 jedinica robe *A*.

U primeru koji je rešen degeneracija rešenja javlja se odmah, od početnog rešenja. Videli smo kako se u tom slučaju bira promenljiva kojoj se određuje vrednost ε. Može se, međutim, dogoditi i drugi slučaj. Početno rešenje nije degenerisano, ali u toku rešavanja problema ono prelazi u degenerisano. To će se desiti kada, u postupku promene rešenja za narednu iteraciju, od dve ili više promenljivih treba oduzeti vrednost nove promenljive. U ovom slučaju, izbor promenljive koja će u narednoj iteraciji imati vrednost ε je jednostavniji. Vrednost ε tada treba odrediti onoj promenljivoj koja je u prethodnoj iteraciji imala pozitivnu vrednost i kojoj odgovara manji koeficijent c_{ij}.

Primer 4.5.3. Robu iz četiri skladišta S_i (i=1, 2, 3, 4) potrebno je dostaviti u tri preduzeća P_j (j=1, 2, 3). Količina robe u skladištima (izvorima), potrebna količina u preduzećima (ponorima) i cena transporta jedinice robe iz određenog skladišta u određeno preduzeće dati su u tabeli II-95. Potrebno je:

a) napisati početno rešenje koristeći dijagonalni metod (severozapadni ugao),
b) rešiti transportni problem tako da ukupni troškovi budu minimalni,
c) odrediti uštede koje se postižu u odnosu na početno rešenje,
d) rešiti zadatak korišćenjem LINDO programskog paketa.

Tabela II-95. Početni podaci transportnog problema

Preduzeća ***Skladišta***	P_1 **(140)**	P_2 **(35)**	P_3 **(105)**
S_1 **(70)**	50	60	0
S_2 **(105)**	40	20	15
S_3 **(70)**	30	45	20
S_4 **(35)**	35	40	25

Rešenje

a) Početno rešenje, dijagonalnom ili metodom severozapadnog ugla, dato je u tabeli II-96.

Tabela II-96. Početno rešenje TP dijagonalnim metodom

Preduzeća ***Skladišta***	P_1 **(140)**	P_2 **(35)**	P_3 **(105)**
S_1 **(70)**	50 **70**	60	0
S_2 **(105)**	40 **70**	20 **35**	15
S_3 **(70)**	30	45	20 **70**
S_4 **(35)**	35	40	25 **35**

Ukoliko bi se ovakvo stanje zadržalo početni transportni troškovi bi iznosili:

$$F(X_0) = 50 \cdot 70 + 40 \cdot 70 + 20 \cdot 35 + 20 \cdot 70 + 20 \cdot 35 = 9.275 \text{ n.j.}$$

b) Kako je početno rešenje degenerisano (r< m+n-1), gde su: *r*-broj bazno popunjenih polja; *m*-broj redova; *n*-broj kolona, pristupa se rešavanju problema tako što je potrebno nebazno polje, sa najnižom cenom transporta, u našem slučaju polje x_{13}, proglasiti za bazno polje, kako bi mogli da odredimo sve potencijale, kao što je prikazano u tabeli II-97.

Tabela II-97. Preračunavanje baznih polja

Preduzeća ***Skladišta***	P_1 **(140)**	P_2 **(35)**	P_3 **(105)**
S_1 **(70)**	50 $-\theta$ **70**	60	0 $+\theta$
S_2 **(105)**	40 **70**	20 **35**	15
S_3 **(70)**	30 $+\theta$	45	20 $-\theta$ **70**
S_4 **(35)**	35	40	25 **35**

Sledeći korak je određivanje potencijala za bazna i diferencijala za nebazna polja, koristeći pomenute formule za preračunavanje, i to na sledeći način:

Za bazna polja računamo: $c_{ij} = u_i + v_j$;
Za nebazna polja računamo: $\Delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$;

$c_{11} = u_1 + v_1 = 50 \Rightarrow v_1 = 50$
$c_{21} = u_2 + v_1 = 40 \Rightarrow u_2 = -10$
$c_{22} = u_2 + v_2 = 20 \Rightarrow v_2 = 30$
$c_{33} = u_3 + v_3 = 20 \Rightarrow u_3 = 20$
$c_{43} = u_4 + v_3 = 25 \Rightarrow u_4 = 25$
$v_3 = 0$
$c_{13} = u_1 + v_3 = 0 \Rightarrow u_1 = 0$

$\Delta_{12} = c_{12} - u_1 - v_2 = 60 - 0 - 30 = 30$
$\Delta_{23} = c_{23} - u_2 - v_3 = 15 + 10 - 0 = 25$
$\Delta_{31} = c_{31} - u_3 - v_1 = 30 - 20 - 50 = -40 \rightarrow \theta = 70$
$\Delta_{32} = c_{32} - u_3 - v_2 = 45 - 20 - 30 = -5$
$\Delta_{41} = c_{41} - u_4 - v_1 = 35 - 25 - 50 = -40$
$\Delta_{42} = c_{42} - u_4 - v_2 = 40 - 25 - 30 = -15$

Potencijal koji se najčešće javlja za bazna polja izjednačava se sa nulom, a to je u našem slučaju v_3=0. Na osnovu teh jednačina se izračunavaju ostale veličine. Zatim se prelazi na izračunavanje diferencijala nebaznih polja po datoj formuli. Dobili smo više negativnih vrednosti za nebazna polja i to nam ukazuje da postoji bolji transportni program, ukoliko se uvede nova promenljiva u odgovarajuće polje. Vrednosti polja Δ_{31} i Δ_{41} su podjednalo negativni i potpuno ravnopravno konkurišu da uđu kao bazno polje u narednu iteraciju. Više smisla ima ići preko polja Δ_{31}, jer je $c_{31}<c_{41}$, pa zbog toga njega proglašavamo za bazno. U to polje stavljamo neodređeni broj $+\theta$. Broj θ određujemo na osnovu izraza:

$$70 - \theta = 0 \Rightarrow \theta = 70$$

Za θ se uzima manja vrednost, ukoliko oba nisu ista (kao što je u našem slučaju). Polje Δ_{31} sada ulazi u bazu sa vrednošću $+\theta$ =70. Onda vršimo preraspodelu transporta preko $+\theta$ i $-\theta$. Dodavanje i oduzimanje θ vrši se sve dok se ne zatvori krug, kao što je prikazano u tabeli II-97. U ovom koraku vodimo računa da nam pri zatvaranju kruga obuhvati i polje x_{13} koje smo proglasili na početku za bazno, zbog uslova degenerisanosti baznog rešenja.

U sledećem koraku pristupamo prvom poboljšanju početnog rešenja (prva iteracija), i crtamo novu matricu, kao što je prikazano u tabeli II-98.

Tabela II-98. Rešenje TP nakon prve iteracije

Preduzeća / ***Skladišta***	P_1 **(140)**	P_2 **(35)**	P_3 **(105)**
S_1 **(70)**	50	60	0 **70**
S_2 **(105)**	40 $-\theta$ **70**	20 **35**	15 $+\theta$
S_3 **(70)**	30 **70**	45	20
S_4 **(35)**	35 $+\theta$	40	25 $-\theta$ **35**

Transportni troškovi posle prve iteracije bi iznosili: $F(X_1)$ = 6.475 n.j. Kako je i u ovim koraku rešenje degenerisano (r < m + n -1), pristupa se rešavanju problema na već opisan način. Jednačina sa najnižom cenom transporta (nebazno polje c_{23}), se proglašava za bazno jer ima vrednost c_{23}=15. Na poznat način ponavljamo postupak određivanja potencijala baznih i diferencijala nebaznih polja.

Za bazna polja računamo: $c_{ij} = u_i + v_j$;
Za nebazna polja računamo: $\Delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$;

$c_{13} = u_1 + v_3 = 0 \Rightarrow u_1 = 0$
$c_{21} = u_2 + v_1 = 40 \Rightarrow v_1 = 25$
$c_{22} = u_2 + v_2 = 20 \Rightarrow v_2 = 5$
$c_{31} = u_3 + v_1 = 30 \Rightarrow u_3 = 5$
$c_{43} = u_4 + v_3 = 25 \Rightarrow u_4 = 25$
$v_3 = 0$
$c_{23} = u_2 + v_3 = 15 \Rightarrow u_2 = 15$

$\Delta_{11} = c_{11} - u_1 - v_1 = 50 - 0 - 25 = 25$
$\Delta_{12} = c_{12} - u_1 - v_2 = 60 - 0 - 5 = 55$
$\Delta_{32} = c_{32} - u_3 - v_2 = 45 - 5 - 5 = 35$
$\Delta_{33} = c_{33} - u_3 - v_3 = 20 - 5 - 0 = 15$
$\Delta_{41} = c_{41} - u_4 - v_1 = 35 - 25 - 25 = -15 \rightarrow \theta = \mathbf{35}$
$\Delta_{42} = c_{42} - u_4 - v_2 = 40 - 25 - 30 = -15$

Nakon izračunavanja diferencijala za nebazna polja, dobili smo dve iste negativne vrednosti za nebazno polje i to nam ukazuje da postoji još uvek bolji transportni program. Više smisla ima ići preko polja Δ_{41}. To je prikazano strelicama u tabeli II-99. Isti postupak se ponavlja i za drugu iteraciju, i formira tabela II-99.

Tabela II-99. Rešenje TP nakon druge iteracije

Preduzeća / Skladišta	P_1 (140)	P_2 (35)	P_3 (105)
S_1 (70)	50	60	0 **70**
S_2 (105)	40 **35**	20 **35**	15 **35**
S_3 (70)	30 **70**	45	20
S_4 (35)	35 **35**	40	25

Transportni troškovi posle druge iteracije iznose: $F(X_1) = 5.950$ n.j. Sada je ispunjen uslov nedegenerisanosti tj. važi $r = m+n-1$, a to znači da je bazno rešenje nedegenerisano. Opet ponavljamo postupak za određivanje potencijala baznih i diferencijala nebaznih polja, kako bi utvrdili da li je dobijeno bazno rešenje optimalno.

Za bazna polja računamo: $c_{ij} = u_i + v_j$;
Za nebazna polja računamo: $\Delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$;

$c_{13} = u_1 + v_3 = 0 \Rightarrow u_1 = -15$
$c_{21} = u_2 + v_1 = 40 \Rightarrow v_1 = 40$
$c_{22} = u_2 + v_2 = 20 \Rightarrow v_2 = 20$
$c_{23} = u_2 + v_3 = 15 \Rightarrow v_3 = 15$
$c_{31} = u_3 + v_1 = 30 \Rightarrow u_3 = -10$
$c_{41} = u_4 + v_1 = 35 \Rightarrow u_4 = -5$
$u_2 = 0$

$\Delta_{11} = c_{11} - u_1 - v_1 = 50 + 15 - 40 = 25$
$\Delta_{12} = c_{12} - u_1 - v_2 = 60 + 15 - 20 = 55$
$\Delta_{32} = c_{32} - u_3 - v_2 = 45 + 10 - 20 = 35$
$\Delta_{33} = c_{33} - u_3 - v_3 = 20 + 10 - 15 = 15$
$\Delta_{42} = c_{42} - u_4 - v_2 = 40 + 5 - 20 = 25$
$\Delta_{43} = c_{43} - u_4 - v_3 = 25 + 5 - 15 = 15$

Kako je svako $\Delta_{ij} \geq 0$,dobijeno rešenje je optimalno, i ono glasi:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 70 \\ 35 & 35 & 35 \\ 70 & 0 & 0 \\ 35 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Minimalnim troškovima transporta iznose: $F(X_2) = 5.950$ n.j.

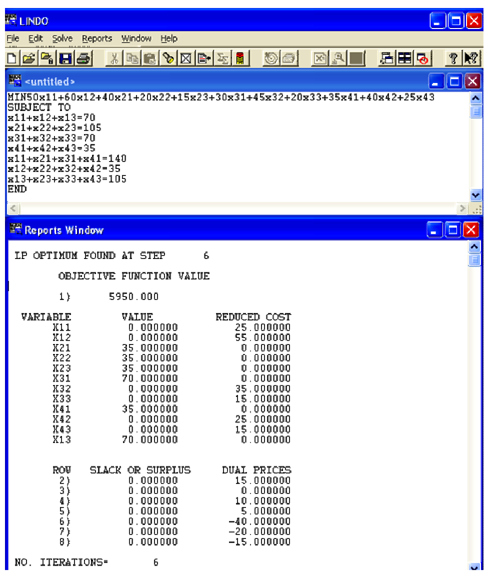
c) Ušteda u odnosu na početno rešenje iznosi: $\Delta F(X) = F(X_0) - F(X_2) = 3.325$ n.j.

Zaključak. Prema optimalnom rešenju transportnog problema uočavamo da se iz prvog skladišta snabdeva treće preduzeće, iz drugog sva tri, a iz trećeg i četvrtog samo prvo preduzeće. Takođe vidimo da se prvo preduzeće snabdeva iz drugog, trećeg i četvrtog skladišta, drugo iz drugog a treće iz prvog i drugog skladišta. Ukoliko se ostvari ovakav program snabdevanja troškovi će biti minimalni i iznose 5.950 n.j., a ušteda koja se ostvaruje u odnosu na početno bazno rešenje je 3.325 n.j. Bilo koji drugi put da se izabere troškovi će biti veći.

d) Rešavanje zadatka pomoću LINDO programskog paketa

MIN 50x11+60x12+40x21+20x22+15x23+30x31+45x32+20x33+35x41+40x42+25x43
SUBJECT TO
x11+x12+x13=70
x21+x22+x23=105
x31+x32+x33=70
x41+x42+x43=35
x11+x21+x31+x41=140
x12+x22+x32+x42=35
x13+x23+x33+x43=105
END

Postavka zadatka u radni prostor programa i dibijeni rezultati prikazani su na slici II-25.



Slika II-25. Postavka zadatka i dibijeni rezultati za TP

Primer 4.5.4. Kompanija AD "Tigar" u Pirotu poseduje tri linije za proizvodnju auto guma L_1, L_2 i L_3 i pet velikih skladišta, odnosno distributivnih centrara D_1, D_2, D_3, D_4 i D_5. Proizvodni kapaciteti su: 4.000; 5.000; 3.000 guma/dan, respektivno. Mogućnost plasmana, u regionima koje pokrivaju distributivni centri, je: 2.000; 1.500; 3.000; 3.500; 2.000 guma/dan, respektivno. Jedinične cene prevoza (n.j./kom) između kompanije i distributivnih centara su: L_1-D_1=2, L_1-D_2=4, L_1-D_3=3, L_1-D_4=5, L_1-D_5=3, L_2-D_1=4, L_2-D_2=2, L_2-D_3=2, L_2-D_4=3, L_2-D_5=4, L_3-D_1=1, L_3-D_2=2, L_3-D_3=4, L_3-D_4=1, L_3-D_5=3. Potrebno je:

a) napisati početno rešenje koristeći dijagonalni metod (severozapadni ugao),
b) Mo-Di metodom rešiti TP, tako da ukupni troškovi budu minimalni,
c) odrediti uštede koje se postižu u odnosu na početno rešenje,
d) proveriti dobijeno rešenje korišćenjem programa LINDO.

Rešenje.

a) Korišćenjem metoda severozapadnog ugla, došlo se do početnog rešenja transportnog problema koje je prikazano u tabeli II-100.

Tabela II-100. Početno rešenje TP – dijagonalni metod

Ponori / ***Izvori***	D_1 (2.000)	D_2 (1.500)	D_3 (3.000)	D_4 (3.500)	D_5 (2.000)
L_1 (4.000)	2 **2.000**	4 **1.500**	3 **500**	5	3
L_2 (5.000)	4	2	2 **2.500**	3 **2.500**	4
L_3 (3.000)	1	2	4	1 **1.000**	3 **2.000**

Ukoliko bi se ovakvo stanje zadržalo početni transportni troškovi bi iznosili: $F(X_0)$= 2·2.000+4·1.500+3·500+2·2.500+3·2.500+1·1.000+3·2.000= 31.000 n.j. Iz tabele II-100. se uočava da je dobijeno nedegenerisano rešenje odnosno da se ispunila ravnoteža r = m+n-1.

b) Odredjivanje minimalnih troškova

Sledeći korak je određivanje potencijala za bazna i diferencijala za nebazna polja:

Za bazna polja računamo: $c_{ij} = u_i + v_j$;
Za nebazna polja računamo: $\Delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$

$c_{11} = u_1 + v_1 = 2 \Rightarrow v_1 = 2$
$c_{12} = u_1 + v_2 = 4 \Rightarrow v_2 = 4$
$c_{13} = u_1 + v_3 = 3 \Rightarrow v_3 = 3$
$c_{23} = u_2 + v_3 = 2 \Rightarrow u_2 = -1$
$c_{24} = u_2 + v_4 = 3 \Rightarrow v_4 = 4$
$c_{34} = u_3 + v_4 = 1 \Rightarrow u_3 = -3$
$c_{35} = u_3 + v_5 = 3 \Rightarrow v_5 = 6$

$u_1 = 0$

$\Delta_{14} = c_{14} - u_1 - v_4 = 5 - 0 - 4 = 1$
$\Delta_{15} = c_{15} - u_1 - v_5 = 3 - 0 - 6 = -3 \rightarrow \theta = \mathbf{500}$
$\Delta_{21} = c_{21} - u_2 - v_1 = 4 + 1 - 2 = 3$
$\Delta_{22} = c_{22} - u_2 - v_2 = 2 + 1 - 4 = -1$
$\Delta_{25} = c_{25} - u_2 - v_5 = 4 + 1 - 6 = -1$
$\Delta_{31} = c_{31} - u_3 - v_1 = 1 + 3 - 2 = 2$
$\Delta_{32} = c_{32} - u_3 - v_2 = 2 + 3 - 4 = 1$
$\Delta_{33} = c_{33} - u_3 - v_3 = 4 + 3 - 3 = 4$

Potencijal koji se najčešće javlja za bazna polja izjednačava se sa nulom, a to je u našem slučaju u_1=0. Na osnovu te činjenice izračunavaju se ostali potencijali za bazna polja. Zatim se prelazi na izračunavanje diferencijala nebaznih polja po datoj formuli. Dobili smo više negativnih vrednosti za nebazna polja. Negativan rezultat diferencijala nebaznih polja ukazuje da postoji bolji transportni program ukoliko se izvrši nova preraspodela transporta tj. uvede nova promenljiva u odgovarajuće polje. Najnegativnije nebazno polje je $\Delta_{15.}$ U to polje stavljamo neodređeni broj + θ. Za θ se uzima manja vrednost tj. neodređeni broj θ određujemo na osnovu izraza:

$$500 - \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = 500$$

Polje Δ_{15}, tj. x_{15} sada ulazi u bazu sa vrednošću + θ. Onda vršimo preraspodelu transporta preko + θ i - θ. Dodavanje i oduzimanje θ vrši se sve dok se ne zatvori krug, kao što je prikazano u tabeli II-101.

Tabela II-101. Preraspodela transporta I

Ponori / Izvori	D_1 (2.000)	D_2 (1.500)	D_3 (3.000)	D_4 (3.500)	D_5 (2.000)
L_1 (4.000)	2 2.000	4 1.500	3 $-\theta$ 500	5	3 $+\theta$
L_2 (5.000)	4	2	2 $+\theta$ 2.500	3 $-\theta$ 2.500	4
L_3 (3.000)	1	2	4	1 $+\theta$ 1.000	3 $-\theta$ 2.000

Nakon preraspodele transporta crta se nova matrica, kao što je prikazano u tabeli II-102.

Tabela II-102. Rešenje nakon prve iteracije

Ponori / Izvori	D_1 (2.000)	D_2 (1.500)	D_3 (3.000)	D_4 (3.500)	D_5 (2.000)
L_1 (4.000)	2 2.000	4 1.500	3	5	3 500
L_2 (5.000)	4	2	2 3.000	3 2.000	4
L_3 (3.000)	1	2	4	1 1.500	3 1.500

Transportni troškovi posle prve iteracije iznose: $F(X_1)$=2·2.000+4·1.500+3·500+2·3.000+ 3·2.000+1·1.500+3·1.500 = 29.500 n.j. Kako je i u ovim koraku rešenje nedegenerisano, pristupa se određivanju potencijala baznih i diferencijala nebaznih polja na poznat način.

$$
\begin{aligned}
c_{11} &= u_1 + v_1 = 2 \quad => \quad v_1 = 2 \\
c_{12} &= u_1 + v_2 = 4 \quad => \quad v_2 = 4 \\
c_{15} &= u_1 + v_5 = 3 \quad => \quad v_5 = 3 \\
c_{23} &= u_2 + v_3 = 2 \quad => \quad v_3 = 0 \\
c_{24} &= u_2 + v_4 = 3 \quad => \quad u_2 = 2 \\
c_{34} &= u_3 + v_4 = 1 \quad => \quad v_4 = 1 \\
c_{35} &= u_3 + v_5 = 3 \quad => \quad u_3 = 0
\end{aligned}
$$

$u_1 = 0$

$$
\begin{aligned}
\Delta_{13} &= c_{13} - u_1 - v_3 = 3 - 0 - 0 = 3 \\
\Delta_{14} &= c_{14} - u_1 - v_4 = 5 - 0 - 1 = 4 \\
\Delta_{21} &= c_{21} - u_2 - v_1 = 4 - 2 - 2 = 0 \\
\Delta_{22} &= c_{22} - u_2 - v_2 = 2 - 2 - 4 = -4 \rightarrow \theta = \mathbf{1500} \\
\Delta_{25} &= c_{25} - u_2 - v_5 = 4 - 2 - 3 = -1 \\
\Delta_{31} &= c_{31} - u_3 - v_1 = 1 - 0 - 2 = -1 \\
\Delta_{32} &= c_{32} - u_3 - v_2 = 2 - 0 - 4 = -2 \\
\Delta_{33} &= c_{33} - u_3 - v_3 = 4 - 0 - 0 = 4
\end{aligned}
$$

Nakon izračunavanja diferencijala, dobili smo nekoliko negativnih vrednosti za nebazna polja. To nam ukazuje da postoje još uvek bolji transportni programi od trenutno dobijenog. Polje Δ_{22} ulazi u bazu sa vrednošću $+\theta$. Ponovo vršimo preraspodelu transporta preko $+\theta$ i $-\theta$, kao što je prikazano u tabeli II-103. Postupak se ponavlja i za drugu iteraciju.

Tabela II-103. Preraspodela transporta II

Ponori / Izvori	D_1 (2.000)	D_2 (1.500)	D_3 (3.000)	D_4 (3.500)	D_5 (2.000)
L_1 (4.000)	2 2.000	4 $-\theta$ 1.500	3	5	3 $+\theta$ 500
L_2 (5.000)	4	2 $+\theta$	2 3.000	3 $-\theta$ 2.000	4
L_3 (3.000)	1	2	4	1 $+\theta$ 1.500	3 $-\theta$ 1.500

Nakon druge iteracije vrši se preraspodela transporta i crta nova matrica, kao što je prikazano u tabeli II-104.

Tabela II-104. Rešenje nakon druge iteracije

Ponori / Izvori	D_1 (2.000)	D_2 (1.500)	D_3 (3.000)	D_4 (3.500)	D_5 (2.000)
L_1 (4.000)	2 / 2.000	4	3	5	3 / 2.000
L_2 (5.000)	4	2 / 1.500	2 / 3.000	3 / 500	4
L_3 (3.000)	1	2	4	1 / 3.000	3

Transportni troškovi posle druge iteracije iznose: $F(X_2)$=2·2.000+3·2.000+2·1.500+2·3.000 +3·500+1·3.000= 23.500 n.j. Posle druge iteracije dobijeno je degenerisano rešenje tj. nije ispunjen uslov $r = m + n - 1$. Zbog toga se pristupa rešavanju problema tako što je potrebno uzeti jednačinu za polje sa najnižom cenom transporta po jedinici proizvoda, u našem slučaju to je polje c_{31}, kako bi odredili sve potrebne potencijale i zadovoljili uslov. Prilikom preraspodele transporta preko + θ i - θ, tj. dodavanjem i oduzimanjem θ, potrebno je voditi računa da pri zatvaranju konture obuhvatimo i polje c_{31}, koje smo proglasili za bazno. Sledi ponavljanje postupka za određivanje potencijala baznih i diferencijala nebaznih polja.

$c_{11} = u_1 + v_1 = 2 \Rightarrow u_1 = -1$
$c_{15} = u_1 + v_5 = 3 \Rightarrow v_5 = 4$
$c_{22} = u_2 + v_2 = 2 \Rightarrow v_2 = 2$
$c_{23} = u_2 + v_3 = 2 \Rightarrow v_3 = 2$
$c_{24} = u_2 + v_4 = 3 \Rightarrow v_4 = 3$
$c_{34} = u_3 + v_4 = 1 \Rightarrow u_3 = -2$

$u_2 = 0$
$c_{31} = u_3 + v_1 = 1 \Rightarrow v_1 = 3$

$\Delta_{12} = c_{12} - u_1 - v_2 = 4 + 1 - 2 = 3$
$\Delta_{13} = c_{13} - u_1 - v_3 = 3 + 1 - 2 = 2$
$\Delta_{14} = c_{14} - u_1 - v_4 = 5 + 1 - 3 = 3$
$\Delta_{21} = c_{21} - u_2 - v_1 = 4 - 0 - 3 = 1$
$\Delta_{25} = c_{25} - u_2 - v_5 = 4 - 0 - 4 = 0$
$\Delta_{32} = c_{32} - u_3 - v_2 = 2 + 2 - 2 = 2$
$\Delta_{33} = c_{33} - u_3 - v_3 = 4 + 2 - 2 = 4$
$\Delta_{35} = c_{35} - u_3 - v_5 = 3 + 2 - 4 = 1$

Nakon izračunavanja diferencijala, nismo dobili nijednu negativnu vrednost za nebazna polja, tj. svako $\Delta ij \geq 0$. To nam ukazuje da je ovo, za date uslove, najbolji transportni program, za koji se transportni troškovi (funkcija cilja) 23.500 n.j. Rešenje prikazano u matričnom obliku izgleda:

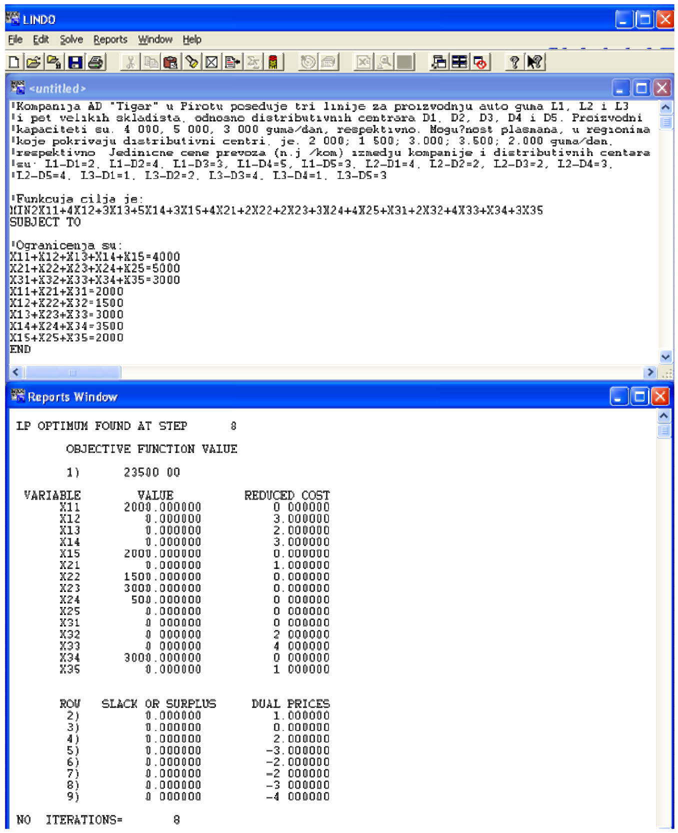
$$X = \begin{bmatrix} 2000 & 0 & 0 & 0 & 2000 \\ 0 & 1500 & 3000 & 500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3000 & 0 \end{bmatrix}$$

c) Uštede u odnosu na početno rešenje

Ispostavilo se da je rešenje transporta, nakon druge iteracije, i konačno, bez obzira što imamo degenerisano rešenje i nije ispunjen uslov da je $r=m+n-1$. Uštede koje su se ostvarile u odnosu na početno rešenje su: $\Delta F(X) = F(x_0)-F(x_2)$ = 31.000-23.500 = 7.500 n.j.

***Zaključak*:** Prema optimalnom rešenju transportnog problema vidimo da se sa prve fabričke linije snabdeva prvo i peto skladište odnosno distributivni centar, sa druge drugo, treće i četvrto, a sa treće samo četvrto. Takođe se iz tabele može zaključiti da se prvo skladište snabdeva samo sa prve linije, drugo sa druge, treće sa treće, četvrto sa druge i treće, a peto sa prve fabričke linije. Ukoliko se izabere bilo koji drugi put transportni troškovi biće veći.

d) Optimalno rešenje transportnog problema rešavamo i proveravamo korišćenjem LINDO programskog paketa, kao što je prikazano na slici II-26.



Slika II-26. Postavka zadatka i dibijeni rezultati u LINDO programu

4.6. Maksimalna vrednost funkcije kriterijuma

Transportni problem je formulisan kao problem minimuma, odnosno kao problem u kome se traži rešenje koje će obezbediti da funkcija kriterijuma uzme minimalnu vrednost. Funkcija kriterijuma u transportnom problemu najčešće označava ukupne transportne troškove, pa je bilo logično tražiti njenu minimalnu vrednost. Moguće je, medutim, formulisati transportni problem u kome će se tražiti takvo rešenje koje će obezbediti da funkcija kriterijuma dostigne svoju maksimalnu vrednost. U tim zadacima ekonomsko značenje koeficijenata c_{ij} iz funkcije kriterijuma je takvo da je logično tražiti maksimalnu vrednost funkcije.

Nema velike razlike u postrupku rešavanja problema minimuma, odnosno maksimuma. Matematički modeli su isti. Razlike postoje pri pronalaženju početnog rešenja i u kriterijumu za ocenu optimalnosti, odnosno izbora promenljive koja će ući u naredno rešenje.

Kod pronalaženja početnog rešenja:

- Kod **dijagonalnog metoda** ne menja se ništa u postupku pronalaženja početnog rešenja. Uostalom, taj metod i ne vodi računa o kriterijumu optimalnosti, pa će početno rešenje biti isto, bez obzira koju vrednost funkcije tražimo.
- Menja se kriterijum za pronalaženje početnog rešenja po **metodu jediničnih koeficijenata**. Kod traženja minimalne vrednosti funkcije kriterijuma, ovaj metod polazi od *najmanjih koeficijenata* c_{ij} u matrici troškova. Pošto je izmenjeno ekonomsko značenje koeficijenata c_{ij}, menja se i ovaj kriterijum. Sada početno rešenje pronalazimo polazeći od *najvećih koeficijenata* c_{ij}, pa prednost u transportu dajemo tim relacijama.
- Kod **Vogel-ovog aproksimativnog metoda** ima razlike u postupku pronalaženja početnog rešenja. Za probleme u kojima se traži minimalna vrednost funkcije računamo razlike između *dva najmanja koeficijenta* c_{ij}, pa prednost dajemo redu ili koloni kojima odgovara najveća razlika. U problemima u kojima tražimo maksimalnu vrednost funkcije kriterijuma tražimo najveće razlike između *dva najveća koeficijenta* c_{ij}, pa prednost dajemo redu ili koloni sa najvećom razlikom.

Nema nikakvih promena u postupku određivanja **optimalnog rešenja** za probleme maksimuma u odnosu na postupak koji se koristi kod problema minimuma. Dualna promenljiva Δ_{ij}, koju određujemo pomoću relacije:

$$\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j) \tag{29}$$

i ovde ima dvojaku ulogu: služi kao kriterijum za ocenu optimalnosti pronađenog rešenja i kao kriterijum za izbor promenljive koja ulazi u naredno bazično rešenje. Za probleme u kojima se traži maksimalna vrednost funkcije kriterijuma pronađeno je optimalno rešenje samo ako su sve dualne promenljive $\Delta_{ij} \leq 0$. Takođe, u naredno rešenje ulazi promenljiva x_{ij} kojoj odgovara najveća pozitivna vrednost dualne promenljive Δ_{ij}.

Primer 4.6.1. Četiri fabrike (F_1, F_2, F_3 i F_4) proizvode robu A i mogu isporučiti potrošačima sledeće količine: F_1 90, F_2 90, F_3 100 i F_4 80 jedinica. Potrošačima su potrebne sledeće količine robe A: potrošaču P_1 120, P_2 40, P_3 60 i potrošaču P_4 140 jedinica. Ukoliko se plaćanje robe izvrši odmah, proizvođači su potrošačima ponudili određene popuste u ceni, što se može videti iz tabele II-105.

Tabela II-105. Procenti popusta u ceni

	P_1	P_2	P_3	P_4
F_1	9	12	13	18
F_2	6	10	8	14
F_3	12	10	15	16
F_4	10	15	12	14

Potrošači su prihvatili da robu plate odmah i žele da sami sačine plan snabdevanja robom A, koji će im obezbediti maksimalni ukupni popust u ceni.

Rešenje: Početno rešenje prikazano u tabeli II-106, pronađeno je pomoću metoda najvećeg koeficijenta c_{ij} u transportnoj tabeli. Najveći koeficijent u tabeli je c_{14} = 18, pa je vrednost promenljive x_{14} = 90. Isporučena je celokupna ponuda fabrike F_1, pa iz daljeg razmatranja isključujemo prvi red. U preostalom delu tabele najveći koeficijent je c_{34} = 16, a vrednost promenljive je x_{34} = 50. Podmirene su ukupne potrebe potrošača P_4. Isključujemo četvrtu kolonu iz daljeg razmatranja i nastavljamo sa određivanjem vrednosti preostalih promenljivih. To su najpre, za koeficijente $c_{33} = c_{42}$ = 15, promenljive x_{33} = 50 i x_{42} = 40. Sada iz razmatranja treba isključiti treći red i drugu kolonu. U preostalom delu tabele najveći koeficijent je c_{43} = 12, pa je vrednost promenljive x_{43} = 10. Pošto iz razmatranja isključimo i treću kolonu, ostaju neizmirene samo potrebe potrošača P_1, pa je lako odrediti vrednost preostalih promenljivih: x_{21} = 90 i x_{41} = 30.

Tabela II-106. Početno rešenje dobijeno metodom najvećih koeficijenata

OS	PS	P_1	P_2	P_3	P_4
	360=360	120	40	60	140
F_1	90	9	12	13	18 90
F_2	90	6 90	10	8	14
F_3	100	12	10	15 50	16 50
F_4	80	10 30	15 40	12 10	14

Iznos funkcije kriterijuma, za bazno rešenje, dobijeno metodom najvećih koeficijenata, je:

$$\max F(x) = 4.730 \text{ n.j.}$$

Rešenje je nedegenerisano, pa je lako, pomoću relacije:

$$c_{ij} = u_i + v_j \tag{4.6.1}$$

izračunati dualne promenljive u_i i v_j. Vrednosti ovih promenljivih upisane su u poslednji red i poslednju kolonu tabele II-107. Odredili smo i vrednost dualnih promenljivih Δ_{ij}. Obzirom na kriterijum optimalnosti, pozitivan uticaj na vrednost funkcije kriterijuma imaju samo promenljive Δ_{ij}>0, pa su u tabeli II-107 upisane pozitivne vrednosti za Δ_{24} = 5 i Δ_{44}= 1.

Tabela II-107. Početno rešenje dobijeno metodom najvećih koeficijenata

OS	PS	P_1	P_2	P_3	P_4	u_i
	360=360	120	40	60	140	
F_1	90	9	12	13	18 90	0
F_2	90	6 -θ 90	10	8	14 +θ +5	-9
F_3	100	12	10	15 +θ 50	16 -θ 50	-2
F_4	80	10 +θ 30	15 40	12 -θ 10	14 +1	-5
v_j		15	20	17	18	

Bazično rešenje iz tabele II-107 nije optimalno. Najveću pozitivnu vrednost ima dualna promenljiva Δ_{24} = 5, pa će promenljiva x_{24} u narednoj iteraciji imati pozitivnu vrednost 10. Potrebne promene rešenja naznačene su, takođe, u tabeli II-107. Novo bazično rešenje nalazi se u tabeli II-108.

Tabela II-108. Bazično rešenje nakon prve iteracije

OS	PS	P_1	P_2	P_3	P_4	u_i
	360=360	120	40	60	140	
F_1	90	9	12	13	18 90	0
F_2	90	6 -θ 80	10	8	14 +θ 10	-4
F_3	100	12 +θ +4	10	15 60	16 -θ 40	-2
F_4	80	10 40	15 40	12	14	0
v_j		10	15	17	18	

Funkcija kriterijuma za ovo rešenje ima vrednost 4.780 n.j. I ovo rešenje nije optimalno zato što postoji promenljiva $\Delta_{31} = 4 > 0$. U naredno rešenje ulazi promenljiva x_{31} i dobija vrednost 40. Potrebne promene rešenja naznačene su, takođe, u tabeli II-108. Novo bazično rešenje pronađeno je u tabeli II-109.

Tabela II-109. Bazično rešenje nakon druge iteracije – prvo optimalno rešenje

OS	PS	P_1	P_2	P_3	P_4	u_i
	360=360	120	40	60	140	
F_1	90	9	12	13	18 90	0
F_2	90	6 40	10	8	14 50	-4
F_3	100	12 40	10	15 60	16	2
F_4	80	10 40	15 40	12	14	0
v_j		10	15	13	18	

Bazično rešenje iz tabele II-109. je optimalno rešenje i čine ga promenljive: x_{14}=90, x_{21}=40, x_{24}=50, x_{31}=40, x_{33}=60, x_{41}= 40, x_{42}=40. Vrednost funkcije kriterijuma, koja označava najveći mogući ukupni popust u ceni, iznosi: max $F(x)$ = 4940 n.j. Pošto je promenljiva Δ_{13}=0, postoji još jedno optimalno rešenje, sa istom vrednošću funkcije kriterijuma, koje je prikazano u tabeli II-111.

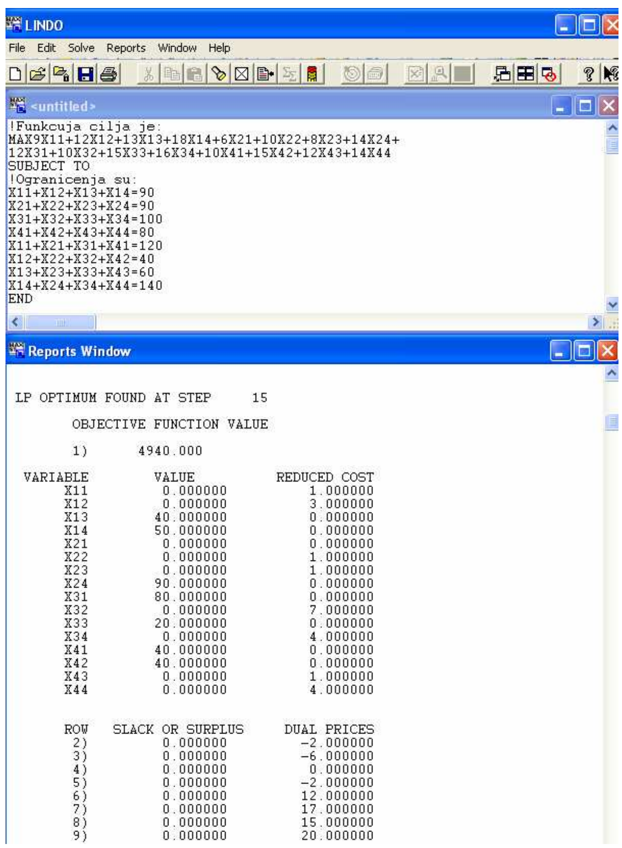
Tabela II-110. Treća iteracija – nakon prvog optimalnog rešenja

OS	PS	P_1	P_2	P_3	P_4	u_i
	360=360	120	40	60	140	
F_1	90	9	12	13 +θ	18 -θ 90	0
F_2	90	6 -θ 40	10	8	14 +θ 50	-4
F_3	100	12 +θ 40	10	15 -θ 60	16	2
F_4	80	10 40	15 40	12	14	0
v_j		10	15	13	18	

Tabela II-111. Bazično rešenje nakon treće iteracije – drugo optimalno rešenje

OS	PS 360=360	P_1 120	P_2 40	P_3 60	P_4 140	u_i
F_1	90	9	12	13 40	18 50	0
F_2	90	6	10	8	14 90	-4
F_3	100	12 80	10	15 20	16	2
F_4	80	10 40	15 40	12	14	0
v_j		10	15	13	18	

Izvršena je provera rezultata proračuna, za ovaj primer, pomoću programa LINDO. Nakon 15 iteracija pronađeno je optimalno rešenje koje je prikazano na slici II-27. Zapažamo da je program pronašao *drugo* optimalno rešenje koje je dobijeno i analitičkim postupkom pomoću metoda potencijala.



Slika II-27. Postavka zadatka i rešenje transportnog problema u LINDO programu

7. Metod raspoređivanja (asignacije)

Problemi raspoređivanja ili, kako se često nazivaju problemi asignacije, predstavljaju specijalan slučaj transportnog problema. Suština problema je u tome da se na optimalan način rasporedi *n* ljudi za obavljanje *n* poslova, tako da funkcija kriterijuma dostigne optimalnu vrednost.

Pri tome se polazi od sledećeg:

a) jedan posao može biti dodeljen samo jednom čoveku i jedan čovek može primiti samo jedan posao,
b) poznata je efikasnost *i*-tog izvrčioca na *j*-toj aktivnosti (svi izvršioci nisu podjednako efikasni za obavljanje pojedinih poslova).

Efikasnost radnika za obavljanje pojedinih poslova može se meriti na različite načine. Ona može biti iskazana vremenom (satima) potrebnim svakom radniku za izvršenje svih poslova, pa će optimalna raspodela ljudi na poslove podrazumevati izvršenje svih poslova za najkraće moguće vreme.

Efikasnost može biti iskazana i količinom proizvodnje svakog radnika na pojedinim poslovima, pa će optimalni raspored podrazumevati izvršenje svih poslova uz maksimalnu proizvedenu količinu.

U probleme koji se mogu rešavati metodom raspoređivanja dolazi i raspored mašina za obavljanje pojedinih poslova, prijem kandidata na konkursu, najkraći ukupni putevi, najniži ukupni troškovi, najveći dohodak i drugo.

Kako se radi o specijalnom slučaju transportnog problema, problemi raspoređivanja se mogu rešavati i transportnim metodama i simpleks metodom. Međutim, struktura ovih problema i neke njihove karakteristike omogućile su da se formuliše poseban algoritam za njihovo rešavanje. H. W. Kuhn je 1955. razvio jedan postupak za rešavanje problema raspoređivanja i nazvao ga **„mađarskim metodom“**. Ovaj metod za rešavanje problema raspoređivanja koristi njegov dualni problem.

Formiranje matematičkog modela i izlaganje mađarskog metoda ilustrovano je na primeru.

7.1. Opšti model

Opšti model asignacije objasnićemo kroz primer gde pet radnika treba da izvrše pet različitih poslova. Svaki od pet radnika zna da izvrši sve poslove, ali istovremeno može da radi samo jedan posao. Različita je individualna efikasnost ovih radnika za obavljanje pojedinih poslova i ona je izražena u satima rada, a data je u tabeli II-117. Raspodelu poslova na radnike treba izvršiti tako da ukupno vreme izvršenja svih poslova bude najkraće.

Tabela II-117. Efikasnost radnika za obavljanje pojedinih poslova

Radnici	**Poslovi**				
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
R_1	14	9	12	8	16
R_2	8	7	9	9	14
R_3	9	11	10	10	12
R_4	10	8	8	6	14
R_5	11	9	10	7	13

Nije poznato koji će posao raditi svaki radnik, pa će se označiti sa:

x_{ij} - *i*-ti radnik koji će raditi *j*-ti posao,

c_{ij} - vreme potrebno *i*-tom radniku za obavljanje *j-tog* posla.

Pošto jedan radnik može raditi samo jedan posao, to mora biti:

$x_{ij} = 1$ ako *i*-ti radnik dobije *j*-ti posao,

$x_{ij} = 0$ u protivnom slučaju (ako *i*-ti radnik ne dobije posao).

Uzmimo još da, u opštem slučaju, imamo *n* radnika (i = 1,... , n) i *n* poslova (j = 1,2,... ,n). Sada možemo formirati opšti model problema raspoređivanja.

Potrebno je pronaći minimalnu vrednost funkcije kriterijuma, kao što je prikazano formulom (71):

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \qquad (7.1.1)$$

uz sledeća ograničenja:

- uslov da jedan radnik može da obavlja samo jedan posao, pa zbir u svakom redu može biti samo 1, kao što je prikazano formulom (7.1.2).

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad i = 1,2,3,...,n \qquad (7.1.2)$$

- uslov da jedan posao može biti dodeljen jednom radniku, pa zbir u svakoj koloni, takođe, može biti samo 1, kao što je prikazano formulom (73).

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad j = 1,2,...,n. \qquad (7.1.3)$$

- Promenljive mogu uzimati samo vrednosti: x_{ij}=1 ako *i*-ti radnik dobije *j*-ti posao, x_{ij}=0 u protivnom slučaju (ako *i*-ti radnik ne dobije posao), kao što je prikazano formulom (74).

$$x_{ij} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (7.1.4)$$

Relacijama (6.0.1) do (6.0.4) formulisan je opšti model problema raspoređivanja. Očigledno da je problem ekvivalentan transportnom problemu u kome svako ishodište raspolaže samo jednom jedinicom proizvoda za transport, a potrebe odredišta, takođe, iznose po jednu jedinicu proizvoda, tj.

$$a_i = b_j = 1 \qquad \text{za svako } i \text{ i svako } j.$$

Postoje, međutim, i druge razlike između ova dva modela:

- matrica koeficijenata c_{ij} u problemu rasporedivanja mora biti kvadratna, tj. mora da ima n redova i n kolona,
- promenljive u problemu raspoređivanja mogu uzimati ili vrednost jedan ili vrednost nula,
- problem raspoređivanja ima svojstvo da je svako njegovo bazično moguće rešenje degenerisano jer ima samo n bazičnih promenljivih $x_{ij} = 1$.

Problem raspoređivanja je po formi linearni model, pa se i za njega može formirati odgovarajući dualni model. Njegov dualni model možemo formulisati na sledeći način:

Potrebno je pronaći maksimalnu vrednost funkcije kriterijuma, kao što je prikazano formulom (7.1.5):

$$G = \sum_{i=1}^{n} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j \tag{7.1.5}$$

uz ograničenja koja su prikazana formulom (76):

$$u_i + v_j \leq c_{ij}, \qquad i,j = 1, 2, 3, ..., n \tag{7.1.6}$$

7.2. Rešavanje problema raspoređivanja

Mađarski metod, koji se koristi za rešavanje problema raspoređivanja, temelji se na teoremi o broju ***nezavisnih nula*** u matrici. Pojam nezavisnih nula u matrici određujemo na sledeći način. Ako u matrici odaberemo nulu tako da svakom redu, ili koloni, pripadne najviše po jedna takva nula, onda odabrane nule nazivamo nezavisnim nulama.

Teorema o broju nezavisnih nula u matrici tvrdi: ***Ako se u nekoj matrici nalaze i nule, onda je maksimalan broj nezavisnih nula, koje se mogu među njima odabrati, jednak minimalnom broju linija koje pokrivaju sve nule***.

Ova teorema omogućava da se problem raspoređivanja može formulisati i na sledeći način: U matrici iz tabele II-117. treba odrediti pet nezavisnih nula tako da zbir odgovarajućih elemenata bude minimalan. Naravno, nezavisne nule možemo odrediti pošto transformišemo elemente matrice i tabele II117.

Transformacija matrice koeficijenata c_{ij} zasniva se na sledećem stavu: ***Optimalno rešenje problema raspoređivanja neće se promeniti ako svakom elementu jednog reda, odnosno jedne kolone, matrice oduzmemo (ili dodamo) jedan isti broj.***

Na osnovu prethodnog stava, uvek se može izvršiti takva transformacija koeficijenata c_{ij} kojom će se obezbediti da matrica u svakom redu i svakoj koloni sadrži najmanje po jednu nulu. Time su stvoreni uslovi za primenu mađarskog metoda.

7.2.1. Minimalna vrednost funkcije kriterijuma

7.2.1.1. Kvadratna matrica koeficijenata

U pomenutom primeru potrebno je pronaći takvo rešenje koje će obezbediti da funkcija kriterijuma postigne svoju minimalnu vrednost. Pet je poslova i pet radnika, što znači da je matrica koeficijenata c_{ij} kvadratna. Postupak rešavanja problema mađarskim metodom odvija se u okviru nekoliko koraka i može se opisati na sledeći način:

Korak 1. U ovom koraku vrši se transformacija koeficijenata matrice efikasnosti radnika, c_{ij}, u nove koeficijente, $\bar{c}_{ij}$, pri čemu je:

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j \qquad (7.2.1)$$

Transformacija se vrši tako što se u svakom redu matrice odabere najmanji koeficijent

$$u_i = \min_j c_{ij}, \quad i = 1, 2, ..., n \qquad (7.2.2)$$

i oduzme od svih elemenata odgovarajućeg reda. Zatim se u novoj matrici pronađe najmanji element u svakoj koloni:

$$v_j = \min_i (c_{ij} - u_i), \quad j = 1, 2, ..., n \qquad (7.2.3)$$

pa se oduzme od svih elemenata kolone. Posle ovih transformacija, svaki red i svaka kolona matrice koeficijenata $\bar{c}_{ij}$ mora imati najmanje po jednu nulu.

U našem primeru, u tabeli II-117, najmanji elementi po redovima su:

$$u_1 = 8, \quad u_2 = 7, \quad u_3 = 9, \quad u_4 = 6, \quad u_5 = 7.$$

Posle izvršenih oduzimanja, dobijamo matricu koja je prikazana u tabeli II-118.

Tabela II-118. Transformacija početnih koeficijenata c_{ij} - po redovima

6	1	4	0	8
1	0	2	2	7
0	2	1	1	3
4	2	2	0	8
4	2	3	0	6

U matrici iz tabele II-118 treća i peta kolona nemaju nule, pa određujemo najmanje elemente po kolonama. To su:

$$v_1 = 0, \quad v_2 = 0, \quad v_3 = 1, \quad v_4 = 0, \quad v_5 = 3.$$

Nakon njihovog oduzimanja po kolonama, dobijamo transformisanu matricu koja je prikazana u tabeli II-119. Ova matrica sadrži bar po jednu nulu u svakom redu i svakoj koloni.

Tabela II-119. Transformacija početnih koeficijenata c_{ij} - po kolonama

6	1	3	0	5
1	0	1	2	4
0	2	~~0~~	1	~~0~~
4	2	1	~~0~~	5
4	2	2	~~0~~	3

Korak 2. U ovom koraku određujemo nezavisne nule u matrici. Polazimo od reda u kome je samo jedna nula. Prvi red ima samo jednu nulu. Zaokruživanjem ćemo označiti da je nezavisna. U četvrtoj koloni postoje još dve nule. One moraju biti zavisne, pa ih precrtavamo.

I drugi red ima samo jednu nulu (u drugoj koloni), koju ćemo proglasiti za nezavisnu i zaokružujemo je. U drugoj koloni nema više nula, pa prelazimo na naredni red sa jednom nulom. Pošto nema takvog reda, onda ćemo jednu nulu iz trećeg reda proglasiti za nezavisnu. Proizvoljno određujemo da je nula iz prve kolone trećeg reda nezavisna, pa nju taokružujemo, a ostale nule će biti zavisne, pa njih precrtavamo.

Kada je broj nezavisnih nula jednak broju redova, odnosno broju kolona, nađeno je optimalno rešenje. Mesta nezavisnih nula određuju promenljive čija je vrednost jedan. U našem primeru nemamo pet nezavisnih nula, što znači da nije nađeno optimalno rešenje i da postupak treba nastaviti.

Korak 3. U ovom koraku vršimo novu transformaciju koeficijenata matrice. Zato određujemo minimalni broj linija koje će pokriti sve nule u matrici. Transformacija se zatim vrši tako što se najmanji nepokriveni elemenat oduzme od svih nepokrivenih elementa, a doda svim elementima koji leže na preseku dveju linija.

Za određivanje sistema linija kojima će se pokriti sve nule u matrici treba koristiti sledeći postupak:

a) označe se svi redovi koji nemaju nezavisnu nulu,
b) zatim se precrtaju sve kolone koje imaju nule u označenim redovima,
c) označe se redovi koji imaju nezavisnu nulu u precrtanim kolonama,
d) postupci pod b) i c) ponavljaju se dokle god je to moguće,
e) na kraju se precrtaju svi neoznačeni redovi.

Opisani postupak je korektno vođen u sledećem slučaju:

- po završenom postupku sve nule u matrici moraju biti precrtane,
- broj linija kojima su sve nule precrtane jednak je broju nezavisnih nula,
- nezavisna nula ne sme se naći na preseku linija, i
- svaka linija sme prolaziti samo kroz jednu nezavisnu nulu.

Za matricu iz tabele II-119 možerno konstruisati sistem linija pokrivanja na sledeći način: Četvrti i peti red nemaju nezavisne nule, pa ćemo ih označiti strelicom (crna strelica). Označeni redovi imaju zavisne nule u četvrtoj koloni, pa smo precrtali četvrtu kolonu (crvena isprekidana linija). U četvrtoj koloni je precrtana nezavisna nula iz prvog reda. Zato označavamo i prvi red (crvena strelica). U prvom redu nema više zavisnih nula, pa je postupak označavanja redova i precrtavanja kolona završen. Precrtavamo neoznačene drugi i treći red. Dobijeni rezultat je prikazan u tabeli II-120.

Tabela II-120. Precrtavanje redova i kolona u prvoj iteraciji

6	1	3	0	5
1	0	1	2	4
0	2	0	1	0
4	2	1	0	5
4	2	2	0	3

Sada određujemo najmanji nepokriveni elemenat u tabeli II-120. To je elemenat $\bar{c}_{12} = \bar{c}_{43} = 1$. Kada oduzmemo 1 od svakog neprecrtanog elementa i dodamo 1 svakom elementu na preseku linija, dobijamo novu matricu, kao što je prikazano u tabeli II-121.

Tabela II-121. Transformisana matrica nakon prve iteracije

5	0	2	0	4
1	0	1	3	4
0	2	0	2	0
3	1	0	0	4
3	1	1	0	2

Korak 4. Ovaj korak sastoji se u ponavljanju koraka 2 i 3 dok se ne dobije optimalno rešenje. Prema tome, vršimo kategorizaciju nula iz tabele II-121.

Drugi red ima samo jednu nulu i ona je nezavisna. Usled toga je nula u prvom redu i drugoj koloni zavisna, i nju zaokružujemo. Sada je u prvom redu ostala još jedna nula, pa ćemo je proglasiti za nezavisnu, pa nju precrtavamo. U prvom redu ima još jedna nula. To je nula iz četvrte kolone i nju proglašavamo za nezavisnu i zaokružujemo je. To će zahtevati da nule u četvrtom i petom redu četvrte kolone budu zavisne, pa njih precrtavamo. U četvrtom redu preostala je još jedna nula iz treće kolone. Ona je nezavisna, a nula u trećem redu i trećoj koloni je zavisna. Postoje neoznačene nule još u trećern redu. Nulu iz prve kolone biramo za nezavisnu, pa je nula iz pete kolone zavisna. Nezavisne nule zaokružujemo, a zavisne precrtavamo.

U tabeli II-121 nije pronađeno optimalno rešenje jer postoje samo četiri nezavisne nule, pa se postupak nastavlja ponavljanjem koraka 3 i 4. Potrebno je odrediti sistem linija kojim će se pokriti sve nule u tabeli II-121.

Peti red nema nezavisne nule i on je označen (crna strelica). U označenom redu pronalazimo zavisnu nulu. To je nula iz četvrte kolone, pa smo precrtali četvrtu kolonu (crvena isprekidana linija). Sada je u četvrtoj koloni precrtana i nezavisna nula iz prvog reda, pa označavamo i prvi red (crvena strelica). Potom se, u označenom prvom redu, precrtava druga kolona jer ima zavisnu nulu u prvom redu. Opet je precrtana i nezavisna nula iz drugog reda, pa označavamo drugi red (crvena strelica). Time je postupak označavanja i precrtavanja završen. Ostaje da precrtarno sve neoznačene redove. Tako smo konstruisali sistem linija precrtavanja, kao što je prikazano u tabeli ii-122.

Tabela II-122. Precrtavanje redova i kolona u drugoj iteraciji

5	~~0~~	2	0	4
1	0	1	3	4
0	2	~~0~~	2	~~0~~
3	1	0	~~0~~	4
3	1	1	~~0~~	2

Najmanji nepokriveni elemenat u tabeli II-122, je $\bar{c}_{21} = \bar{c}_{23} = \bar{c}_{53} = 1$. Kada 1 oduzmemo od svakog neprecrtanog elementa i dodamo ga svakom elementu na preseku linija, dobijamo tabelu II-123.

Tabela II-123. Transformisana matrica nakon druge iteracije

4	0	1	~~0~~	3
0	~~0~~	~~0~~	3	3
~~0~~	3	~~0~~	3	0
3	2	0	1	4
2	1	~~0~~	0	1

Određujemo nezavisne nule u tabeli II-123. U četvrtom redu postoji samo jedna nula i ona je nezavisna, pa nju zaokružujemo. Usled toga, sve nule treće kolone moraju biti zavisne i one su precrtane. Sada peti red ima samo jednu nulu u četvrtoj koloni i ona je nezavisna. Zato će nula iz prvog reda četvrte kolone biti zavisna, pa sada i prvi red ima jednu nulu, koju proglašavamo za nezavisnu. Zbog toga je nula u drugom redu druge kolone zavisna. U drugom redu ostala je neoznačena nula iz prve kolone, pa je proglašavamo za nezavisnu. Pošto precrtamo nulu iz trećeg reda prve kolone, ostaje poslednja nula u petoj koloni trećeg reda, koju proglašavamo za nezavisnu.

Dobili smo pet nezavisnih nula, što znači da je rešenje iz tabele II-123 optimalno. Optimalno rešenje sačinjavaju sledeće prornenljive:

$$x_{12} = 1 \quad x_{21} = 1 \quad x_{35} = 1 \quad x_{43} = 1 \quad x_{54} = 1$$

Optimalno rešenje je predstavljeno u matrici sa polaznim parametrima, i izgleda kao što je prikazano u tabeli II-124.

Tabela II-124. Optimalni raspored radnika

Radnici	***Poslovi***				
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
R_1	14 0	9 **1**	12 0	8 0	16 0
R_2	8 **1**	7 0	9 0	9 0	14 0
R_3	9 0	11 0	10 0	10 0	12 **1**
R_4	10 0	8 0	8 **1**	6 0	14 0
R_5	11 0	9 0	10 0	7 **1**	13 0

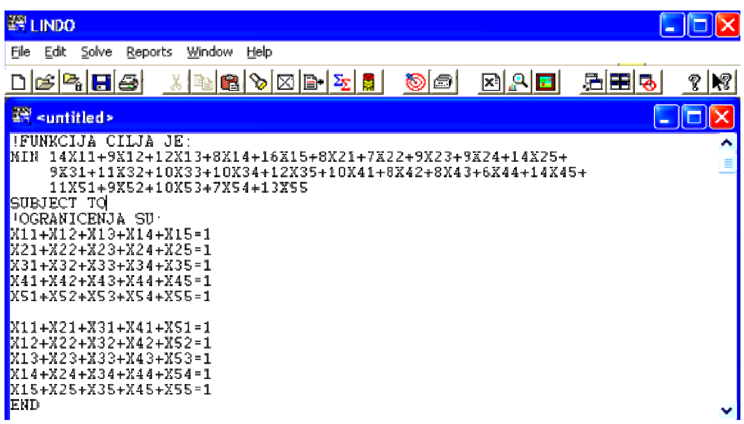
Minimalna vrednost funkcije kriterijuma iznosi:

$$F(x) = 9+8+12+8+7 = 44 \text{ sati.}$$

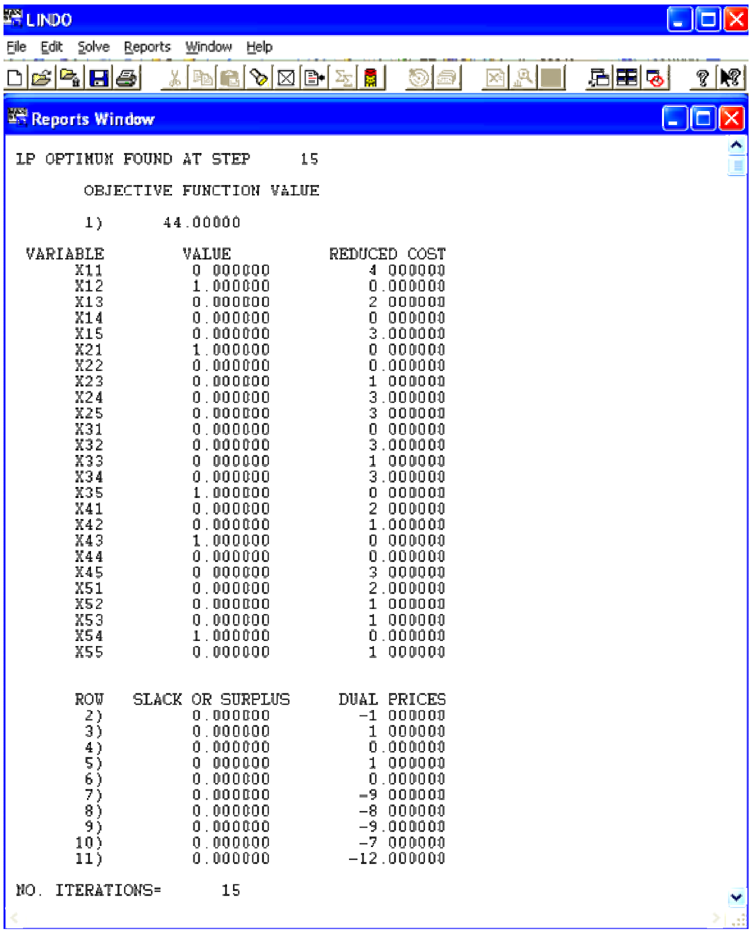
Optimalno rešenje može se objasniti na sledeći način:

Radnik R_1 dobiće posao P_2, radnik R_2 posao P_1, radnik R_3 posao P_5, radnik R_4 posao P_3 i radnik R_5 posao P_4. Oni će sve poslove obaviti za 44 sata rada i to je najmanji broj sati za obavljanje svih poslova.

Rešavanje problema raspoređivanja (asignacije) može se uraditi i odgovarajućim softverskim paketima. Predhodni primer koji je urađen analitičkim putem, izračunat je i korišćenjem LINDO programa. Postavka zadatka prikazana je na slici II-36, a rezultat je prikazan na slici II-37.



Slika 36. Postavka zadatka



Slika 37. Rezultat zadatka

7.2.1.2. Nekvadratna matrica koeficijenata

Pokazaćemo na jednom primeru kako se rešavaju problemi raspoređivanja u kojima broj redova nije jednak broju kolona. U pitanju je jedno transportno preduzeće ima u jednom trenutku 4 slobodna kamiona. Kamioni se nalaze u garažama: G_1, G_2, G_3 i G_4, koje su u različitim mestima. Potrebno je uputiti po jedan kamion na pet različitih utovarnih mesta: M_1, M_2, M_3, M_4 i M_5. Rastojanja garaža od utovarnih mesta su različita. Tabela II-125 sadrži podatke o rastojanjima (c_{ij}) između utovarnih mesta i garaža.

Potrebno je odrediti iz kojih garaža i na koja utovarna mesta treba, uputiti kamione, pa da pređeni put svih kamiona bude najmanji, kao i koje utovarno mesto neće dobiti kamion.

Tabela II-125. Rastojanja garaža od utovarnih mesta

Utovarna mesta	Garaže			
	G_1	G_2	G_3	G_4
M_1	12	11	12	13
M_2	9	16	10	13
M_3	11	10	9	10
M_4	15	13	12	13
M_5	11	14	11	15

Problem rešavamo tako što ćemo proširiti matricu iz tabele II-125 sa još jednom kolonom, tj. nepostojećom garažom, čija je udaljenost od svih utovarnih mesta jednaka nuli. Na taj način dobijamo kvadratnu matricu, pa problem rešavamo na poznati način. Nova, proširena matrica je data u tabeli II-126.

Tabela II-126. Proširena početna matrica

12	11	12	13	0
9	16	10	13	0
11	10	9	10	0
15	13	12	13	0
11	14	11	15	0

Proširenjem matrice novom kolonom, u svakom redu matrice već imamo po jednu nulu. Zato transformaciju koeficijenata c_{ij} nastavljamo po kolonama. Pošto odredimo najmanje koeficijente po kolonama i oduzmemo ih od ostalih, dobijamo tabelu II-127.

Tabela II-127. Precrtavanje redova i kolona u prvoj iteraciji

→	3	1	3	3	0
	0	6	1	3	0
	2	0	0	0	0
→	6	3	3	3	0
	2	4	2	5	0

U tabeli II-127 izvršena je i kategorizacija nula. Kako je broj nezavisnih nula manji od pet, određen je i sistem linija kojima su prekrivene sve nule u matrici. Najmanji neprecrtani elemenat je $\bar{c}_{12} = 1$. Kada ga oduzmemo od neprecrtanih elemenata i dodamo elementima na preseku linija, dobijamo vrednost kao što je prikazano u tabeli II-128.

Tabela II-128. Precrtavanje redova i kolona u drugoj iteraciji

	2	0	2	2	0
	0	6	1	3	1
	2	0	0	0	1
→	5	2	2	2	0
→	1	3	1	4	0

Još uvek nije proriađeno optimalno rešenje. Određen je sistem linija kojima su precrtane sve nule u tabeli II-128. Najmanji neprecrtarii koeficijent je $\bar{c}_{51} = \bar{c}_{53} = 1$. Nakon izvršene transformacije dobijena je tabela II-129.

Tabela II-129. Transformisana matrica nakon druge iteracije

2	0	2	2	1
0	6	1	3	2
2	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	0	2
4	1	1	1	0
$\cancel{0}$	2	0	3	$\cancel{0}$

Dobili smo pet nezavisnih nula, što znači da je rešenje iz tabele II-129 optimalno, a njega sačinjavaju sledeće promenljive:

$$x_{12} = 1 \quad x_{21} = 1 \quad x_{34} = 1 \quad x_{45} = 1 \quad x_{53} = 1$$

Optimalno rešenje je predstavljeno u matrici sa polaznim parametrima, pa izgleda kao u tabeli II-130. Minimalna vrednost funkcije kriterijuma iznosi:

$$F(x) = 11+9+10+0+11= 41.$$

Tabela T_129. Optimalni raspored kamiona

Utovarna mesta	***Kamioni***				
	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5
M_1	12 / 0	11 / **1**	12 / 0	13 / 0	0 / 0
M_2	9 / **1**	16 / 0	10 / 0	13 / 0	0 / 0
M_3	11 / 0	10 / 0	9 / 0	10 / **1**	0 / 0
M_4	15 / 0	13 / 0	12 / 0	13 / 0	0 / **1**
M_5	11 / 0	14 / 0	11 / **1**	15 / 0	0 / 0

Optimalno rešenje objašnjavamo na sledeći način: Utovarno mesto M_1 dobija kamion iz garaže G_2, mesto M_2 iz garaže G_1, mesto M_3 iz G_4 i mesto M_5 iz garaže G_3. Utovarno mesto $M4$ treba da dobije kamion iz nepostojeće garaže, što znači da ono neće dobiti kamion. Minimalna vrednost funkcije kriterijuma označava najkraći put koji će preći svi kamioni od garaža do utovarnih mesta.

7.2.2. Maksimalna vrednost funkcije kriterijuma

Metodom raspoređivanja mogu se rešavati i problemi u kojima se traži maksimalna vrednost funkcije kriterijuma. Razmotrićemo na jednom primeru kako se rešavaju ovi problemi. U pitanju je dorada proizvoda P koja se može izvršiti na 4 različite mašine. Preduzeće je obučilo 4 radnika za rad na ovim mašinama. Jedan radnik će raditi samo sa jednom mašinom. Provera stručne sposobnosti radnika izvršena je tako što je svaki radnik radio po jedan sat na svakoj mašini i za to vreme proizveo sledeću količinu proizvoda *P*, kao što je prikazano u tabeli II-131.

Tabela II-131. Proizvedena količina proizvoda P

Mašine	***Radnici***			
	R_1	R_2	R_3	R_4
M_1	6	9	9	11
M_2	4	5	11	8
M_3	9	5	12	7
M_4	8	10	13	8

Potrebno je izvršiti takav raspored radnika na mašinama da oni ostvare maksimalnu proizvodnju proizvoda *P*. Ovaj problem maksimuma rešavamo na sledeći način:

1) Za svaki red tabele II-131 odabere se najveći koeficijent c_{ij} i oduzme od ostalih koeficijenata iz tog reda. Tako dobijamo tabelu II-132.

Tabela II-132. Transformacija početnih koeficijenata c_{ij} - po redovima

-5	-2	-2	0
-7	-6	0	-3
-3	-7	0	-5
-5	-3	0	-5

2) Svi koeficijenti iz tabele II-132 pomnože se sa -1 i nastavi se sa rešavanjem problema tražeći minimalnu vrednost funkcije kriterijuma. Dalji tok rešavanja problema dat je u tabelama II-133 do II-136.

Tabela II-133. Prevođenje problema tipa max u tip min

5	2	2	0
7	6	0	3
3	7	0	5
5	3	0	5

Tabela II-134. Transformacija početnih koeficijenata c_{ij} - po kolonama

2	0	2	0
4	4	0	3
0	5	0	5
2	1	0	5

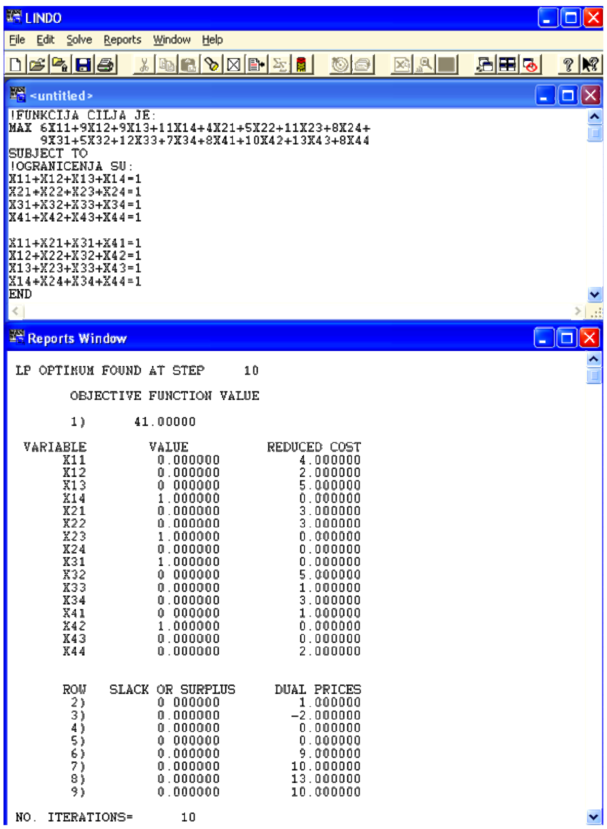
Tabela II-135. Transformisana matrica nakon prve iteracije

2	0	3	0
3	3	0	2
0	5	1	5
1	0	0	4

Tabela II-136. Optimalan plan proizvodnje proizvoda P

Mašine	***Radnici***			
	R_1	R_2	R_3	R_4
M_1	6 0	9 0	9 0	11 **1**
M_2	4 0	5 0	11 **1**	8 0
M_3	9 **1**	5 0	12 0	7 0
M_4	8 0	10 **1**	13 0	8 0

Primer je rešen korišćenjem softverskog paketa LINDO i prikazan na slici II-38.



Slika II-38. Postavka i rešenje problema

Tabela II-136 sadrži optimalno rešenje: Na mašini M_1 radiće radnik R_4, na mašini M_2 radnik R_3, na mašini M_3 radnik R_1 i na mašini M_4 radnik R_2. Njihova maksimalna proizvodnja proizvoda P, za jedan sat rada, je 41 komad, tj. $maxF(x)$=41. Ti podaci se mogu uočiti i na slici II-38.

7.3. Rešavanje transportnog problema mađarskim metodom

Optimalno rešenje transportnog problema, pored metoda raspodele i metoda koeficijenata (potencijala), može se pronaći i korišćenje ***mađarskog metoda***. Pošto smo upoznali osnove mađarskog metoda, u poglavlju 7.3., pokazaćemo na primeru kako se vrši njeno prilagođavanje za rešavanje transportnog problema. U pitanju je proizvođač koji proizvodi robu *A* na četiri proizvodna mesta. Robu je potrebno dostaviti do pet potrošačkih centara. Svi potrebni podaci dati su u tabeli II-137.

Tabela II-137. Početni podaci

Proizvođač	***Potrošački centri***				
	P_1 **(60)**	**P$_2$ (50)**	P_3 **(30)**	**P$_4$ (20)**	P_5 **(40)**
M_1 **(65)**	8	3	5	5	4
M_2 **(50)**	2	5	3	6	8
M_3 **(40)**	4	2	8	3	6
M_4 **(45)**	3	6	9	5	3

U prvom koraku vršimo transformaciju koeficijenata c_{ij}, prema relaciji (7.2.2), je:

$$u_1 = 3 \quad u_2 = 2 \quad u_3 = 2 \quad u_4 = 3$$

a, prema relaciji (7.2.3):

$$v_1 = 0 \quad v_2 = 0 \quad v_3 = 1 \quad v_4 = 1 \quad v_5 = 0$$

Transformisane koeficijente unosimo u tabelu II-138 sa ostalim podacima o transportnom problemu.

Tabela II-138. Transformisana tabela po redovima i kolonama

Proizvođač	***Potrošački centri***				
	P_1 **(60)**	**P$_2$ (50)**	P_3 **(30)**	**P$_4$ (20)**	P_5 **(40)**
M_1 **(65)**	5	0 **50**	1	1	1
M_2 **(50)**	0 **50**	3	0	3	6
M_3 **(40)**	2	0	5	0 **20**	4
M_4 **(45)**	0 **10**	3	5	1	0 **35**

U drugom koraku vršimo kategorizaciju nula. Ovde treba imati u vidu da će svaka nezavisna nula u rnatrici predstavljati onoliko redova, odnosno kolona, kolika je vrednost slobodnog člana posmatranog reda, odnosno kolone. Drugim rečima, slobodni članovi a_i i b_j određuju „multiplicitet" nezavisne nule u preseku reda i kolone, pri čemu je multiplicitet nezavisne nule jednak manjem od ovih slobodnih članova. Zaokruženi brojevi u tabeli označavaju multiplicitet nezavisnih nula.

Nezavisne nule za tabelu II-138 određene su na sledeći način. Prvi red ima samo jedriu nulu i ona je nezavisna, pa je zaokružujemo (crveni krug). Njen multiplicitet je 50, a određen je na osnovu manjeg slobodnog člana prvog reda i druge kolone. Nula iz trećeg reda druge kolone je zavisna, pa je precrtavamo (crvena linija), sada treći red ima samo jednu nulu, $\bar{c}_{34} = 0$. Multiplicitet ove nule je 20. Drugi i četvrti red imaju po dve nule, pa nastavljamo sa drugim redom. Nula u prvoj koloni ima veći multiplicitet, pa određujemo da je ona nezavisna, sa multiplicitetom 50. Druga nula u drugom redu je sada zavisna. Započeli smo prvu kolonu. Njen multiplicitet nije ispunjen, pa će nula u četvrtom redu biti nezavisna sa preostalim multiplicitetom od 10. Konačno, nula iz pete kolone četvrtog reda je nezavisna sa multiplicitetom 35. Zapazimo da ovo još uvek ne predstavlja moguće rešenje jer nisu zadovoljena sva ograničenja.

Prelazimo na korak 3. U ovom koraku treba odrediti sistem linija prekrivanja nula u matrici kako bismo izvršili novu transformaciju koeficijenata. Sistem linija za tabelu II-138 određen je na sledeći način.

Nule u prvom i trećem redu imaju manje multiplicitete od vrednosti odgovarajućih slobodnih članova ovih redova. Zato su prvi i treći red označeni kao redovi koji nemaju nezavisne nule (crne strelice). Zatim su precrtane kolone (isprekidane crvene linije) koje imaju nule u ovim redovima, a to su druga i četvrta kolona. Postupak označavanja redova je završen, pa sve neoznačene redove precrtavamo.

Najmanji neprecrtani element u matrici je $\bar{c}_{13} = \bar{c}_{15} = 1$. Pošto sve neprecrtane elemente matrice smanjimo za 1, a sve elemente sa preseka linija povećamo za 1, dobijamo koeficijente iz tabele II-139. Rešenje iz tabele II-139 je moguće rešenje, pa je ono, prema tome, i optimalno rešenje.

Tabela II-139. Optimalno rešenje

Proizvođač	***Potrošački centri***				
	***P*₁ (60)**	**P₂ (50)**	***P*₃ (30)**	**P₄ (20)**	***P*₅ (40)**
***M*₁ (65)**	4	0 **30**	0 **30**	1	0 **5**
***M*₂ (50)**	0 **50**	4	~~0~~	4	6
***M*₃ (40)**	1	0 **20**	4	0 **20**	3
***M*₄ (45)**	0 **10**	4	5	2	0 **35**

Napomenimo još da svi transformisani koeficijenti c_{ij} iz tabele II-139 imaju iste vrednosti kao i dualne promenljive Δ_{ij} iz klasičnog transportnog problema, a koje se mogu odrediti za optimalno rešenje iz tabele II-139.